МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ XXI ВЫПУСК VII

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Ульяновск

1971

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ XXI ВЫПУСК VII

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Ульяновск
1971

А. И. ШИНЯЕВА

КРУЖКОВАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ОДИН ИЗ ПУТЕЙ РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ УЧАЩИХСЯ МЛАДШЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА

Рассматривая вопрос о развитии познавательной активности учащихся начальных классов, мы исходим прежде всего из того, что в основе познавательной деятельности учащихся лежит активная работа их мысли. Активизация познавательной деятельности должна способствовать «формированию личности человека, который умеет творчески решать задачи, самостоятельно, критически мыслить, вырабатывать и защищать свою точку зрения, убеждения, непрерывно пополнять и обновлять свои знания и применять их для творческого преобразования действительности, соединять теорию с практикой»[1].

Большую роль играет познавательная активность в процессе обучения математике. Ясно, что познавательная деятельность учащихся в этом случае должна быть направлена не только на усвоение готовых знаний, но и на их самостоятельное приобретение.

Весь процесс обучения в советской школе пронизан стремлением организовать работу так, чтобы она пробуждала у учащихся жажду знаний, интерес к изучению и решению познавательных задач. Однако наблюдения показывают, что целый ряд учащихся, оканчивающих школу, не имеет внутренней потребности дальней-

[1] М. Н. Скаткин. Активизация познавательной деятельности учащихся в обучении. М., 1965, стр. 4.

шего приобретения знаний и, тем более, настоящей увлеченности наукой. В связи с этим следует заботиться о развитии познавательной активности, интереса к знаниям, в частности по математике, в течение всего периода обучения.

Исследования показывают, что у части детей младшего школьного возраста может проявляться повышенный интерес к некоторым предметам, в частности к математике. Он выражается прежде всего в большом желании заниматься математикой не только на уроке, но и во внеурочное время. Такие дети охотно решают задачи повышенной трудности, знания их обычно выходят за рамки программы. Очень важно вовремя поддержать такой интерес, всячески способствуя его развитию, умело использовать его для пробуждения интереса к математике у всех учащихся класса.

Не касаясь всех причин возникновения повышенного интереса к математике у детей младшего школьного возраста, отметим, что в наше время, когда математика заняла одно из ведущих мест в развитии техники, положительное влияние в этом направлении могут оказывать радио и телевизионные передачи, а также в некоторых случаях интерес к математике со стороны родителей. Несомненно, главной причиной по-прежнему остается сам процесс преподавания этого предмета в школе. Наблюдения показывают, что там, где учитель сам увлечен математикой, умело строит уроки, проводит интересную внеклассную работу, полную мысли и творчества, ученики, в большинстве своем, проявляют к этому предмету повышенный интерес.

Не останавливаясь на таких важных способах активизации познавательной деятельности, как проблемное изложение знаний, вопросы учителя, дискуссии, самостоятельная работа учащихся и др., рассмотрим, какую роль в развитии познавательного интереса и активности учащихся младшего школьного возраста играет кружковая работа. Исследуя этот вопрос, мы в течение двух лет проводили работу математических кружков в I, II, III классах школы № 1 г. Мелекесса.

Считаем, что основной задачей кружковых занятий является поддержание и развитие познавательной активности у детей, проявляющих в какой-то степени повышенный интерес к математике, а также умелое ис-

пользование положительного влияния, которое может оказать эта работа на всех учащихся класса. В центре всей работы находится постановка и разрешение определенных познавательных задач. Ясно, что здесь невозможно ограничиться только вопросами программы, тем не менее, весь материал, рассматриваемый на занятиях кружка, неразрывно связан с программным.

Ведущее место отведено вопросам и упражнениям, способствующим повышению уровня общего математического развития детей, а именно: развивающим математическое мышление, пространственное воображение, способность абстрагирования, обобщения, переосмысливания некоторых известных положений, построения цепи логических рассуждений, а также упражнениям, совершенствующим вычислительную и измерительную культуру учащихся.

На занятиях кружка эти упражнения не имеют резкого разграничения — каждое из них содержит материал различного характера. Кроме того, включаются чисто познавательные вопросы с целью расширения математического кругозора учащихся.

Учитывая известный психологический факт, что чувство удовольствия предотвращает возникновение усталости, что умственное утомление зависит не только от фактического выполнения работы, но также от сопровождающих условий, мы придаем большое значение занимательной форме при решении довольно сложных математических задач. Однако стараемся не упускать тех случаев, когда математический процесс сам по себе становится источником познавательного интереса ребенка. Такое построение занятий делает возможным проводить их после уроков продолжительностью 30—35 минут в I классе, 40—60 минут во II и III классах еженедельно.

Остановимся несколько подробнее на вопросах и видах упражнений, которые рассматриваются на кружковых занятиях.

I. Вопросы, развивающие способность абстрагирования и обобщения.

1. Применение записи чисел в общем виде:

а) общий вид записи переместительного закона для действий сложения и умножения двух чисел (2 класс).

(А+Б=Б+А, А×Б=Б×А. Обозначение чисел буквами введено в 1 классе);

б) выражение трехзначных чисел с помощью разрядных единиц (3 класс). $\overline{авс}=а\times100+в\times10+с$.

2. Изучение недесятичных систем счисления, в частности пятиричной. Сложение, вычитание и умножение чисел в этой системе (3 класс).

3. Действия с нулем (1, 2 классы).

$$а\pm0=а \qquad 0\times а=0$$
$$а\times0=0 \qquad 0:а=0$$

4. Запись условия задач и примеров в общем виде (2, 3 классы).

Например: «Задумано число. Если его умножить на 5, а затем к результату прибавить 5, получится 555. Записать условие в общем виде и найти это число». $а\times5+5=555$. Число а находится на основании зависимости между компонентами действий.

Во всех приведенных случаях детям предлагается *ряд конкретных примеров, задач, на основании которых* они сами делают соответствующие выводы. Познавательная деятельность выступает здесь как необходимое условие.

Интересно проявляют себя дети, когда конкретные примеры дают повод сделать ложное обобщение.

Например, при составлении и изучении таблицы простых чисел в пределе 100, отметили, что числа 8, 28, 48, 68, 88, делятся на 4. На вопрос: «Делится ли на 4 число 38?» некоторые дети, несмотря на знание табличных случаев деления на 4, ответили, что делится, так как «в конце» стоит число 8. Наиболее же сообразительные сразу определили, что это несущественный признак деления чисел на 4 и что никакого обобщения в этом случае сделать нельзя.

Характерно, что уже в этом возрасте дети могут обобщать не только факты, но и способы рассуждений при решении некоторых задач.

Так, при решении задачи: «Сколько всего прямоугольников на чертеже?».

1	2	3
4	5	6

Рис. 1. III класс.

Андрюша Я. предложил «обводить» их по «правилу» соединения цифр, когда требовалось составить всевозможные числа с помощью цифр 1, 2, 3 без повторений, а именно: учесть 1-й, затем взять прямоугольник, состоящий из 1-го и 2-го, затем из 1-го, 2-го и 3-го. После этого 2-й, затем 2-й, объединенный с 3-м, после чего оставшийся 3-й. Таким образом учли 6 прямоугольников. Поступив также с прямоугольниками «нижнего ряда», учтем еще 6, и, наконец, применив те же рассуждения для прямоугольников, состоящих из 1-го и 4-го, из 2-го и 5-го и из 3-го и 6-го, учтем оставшиеся 6. Всего получим 18 прямоугольников.

Подобные упражнения, несомненно, способствуют повышению познавательной активности учащихся.

II. Вопросы, развивающие логическое мышление:

1. Угадывание задуманного числа.

Пример: «Задумайте число, прибавьте 4 и отнимите 3. По ответу можно отгадать задуманное число. Кто это может сделать?» (1 класс). В этом примере дети должны сделать логическое заключение, что задуманное число при этом увеличивается лишь на 1.

2. Задачи такого рода: «Не перемещая цифр, поставить арифметические знаки так, чтобы во всех случаях:

1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5 6 7
1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8 9

получились примеры с ответом 1» (3 класс). Покажем на одном из этих примеров, каким образом логические рассуждения приводят к желаемому результату.

Имеем 7 подряд написанных цифр 1 2 3 4 5 6 7. Любые две из них, не соединенные никаким знаком, можно рассматривать как запись двузначного числа, аналогично обстоит дело с любым числом цифр. Если мы решим перед 7 поставить знак (ясно, что им может быть минус или знак деления), тогда остальные знаки необходимо поставить так, чтобы до 7 получилось либо 8, либо 7, т. к. $8-7=1$ и $7:7=1$. Остановимся на первом из этих чисел. Значит, до 6 нам нужно получить либо 2, т. к. $2+6=8$, либо 14, т. к. $14-6=8$, либо 48, т. к. $48:6=8$.

Остановимся снова на первом, т. е. на 2. Теперь до 5 нам нужно получить либо 10, т. к. $10:5=2$, либо 7, т. к. $7-5=2$, а это уже нетрудно сделать. Например, $1+2+3+4=10$ или $1\times2\times3+4=10$.

Итак, связывая наши рассуждения в единую цепь, имеем один из вариантов решения этой задачи: $(1+2+3+4):5+6-7=1$.

Следует отметить, что составление примеров другим способом вызывает большой интерес. Некоторые учащиеся даже пытаются определить число всевозможных вариантов решения этой задачи.

3. Примеры на восстановление и замену цифр.

Например: «В данном примере заменить последовательно 9, 8, 7, 6, 5 цифр нулями, чтобы в ответе получилось 1111» (3 класс).

$$\begin{array}{rccc}
 & 1 & 1 & 1 \\
 & 3 & 3 & 3 \\
+ & 5 & 5 & 5 \\
 & 7 & 7 & 7 \\
 & 9 & 9 & 9
\end{array}$$

Если ученик пытается выполнить это задание, не применяя логических рассуждений, то вряд ли эта работа достигнет цели прежде, чем вызовет утомление.

4. Решение задач логического характера.

Примеры:

Задача № 1. У Саши и Нади имеются конфеты. Если Саша даст Наде одну конфету, то у них будет поровну. На сколько конфет будет больше у Саши, чем у Нади, если она ему даст 2 конфеты? (3 класс).

Учащиеся обычно легко ошибаются и называют в качестве ответа число 3 или 4, и только логические рассуждения приводят к правильному ответу.

Задача 2. Как из 9-и, одинаковых по виду шариков, выделить один, отличающийся от других более тяжелым весом, не больше, чем двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь.

Задача 3.

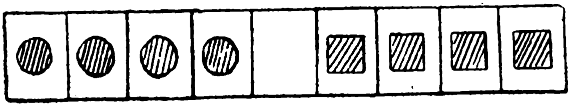


Рис. 2.

Поменять местами кружки и квадраты (пособие готовится для каждого члена кружка), передвигая кружки только вправо на свободную клетку, а квадраты только влево, допуская в этих направлениях «перепрыгивание» через одну фигуру другой формы, если за ней имеется свободная клетка. Первые же попытки перемещения «наугад» оканчиваются неудачей. Только после того, как учащиеся приходят к логическому заключению, что любые две одинаковые фигуры при своем перемещении не должны оказываться рядом, задачу удается решить.

Задачи, связанные с переливаниями, переправами (2—3 класс).

III. Вопросы, связанные с переосмысливанием некоторых известных положений.

1. Является ли число 1 самым маленьким? (1 класс).

2. Всегда ли при сложении 2-х чисел получается число, большее каждого из слагаемых? (1—2 класс).

3. Можно ли утверждать, что произведение чисел больше каждого из сомножителей (3 класс).

4. Можно ли сказать, что число 5 не делится на 2 равные части? (2—3 класс) и др.

Ясно, что до того времени, пока учащиеся не были знакомы с числом нуль, с долями целого, на эти вопросы они давали утвердительные ответы. Теперь же каждое

из этих утверждений им приходится переосмысливать.

Еще более глубокого переосмысливания потребовало выполнение арифметических действий (сложения, вычитания, умножения) над числами в пятиричной системе счисления (3 класс).

Подобные вопросы и упражнения особенно способствуют развитию познавательной активности учащихся, повышая интерес к теории математики.

IV. Упражнения, развивающие пространственное представление и воображение. Эту задачу в основном решают вопросы геометрического характера.

1. Упражнения, связанные с перекладыванием «палочек» (1—2 класс).

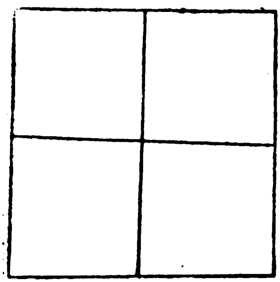


Рис. 3

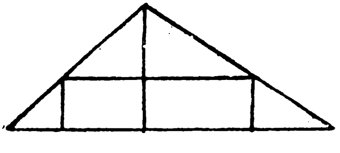
а) В предлагаемой фигуре убрать 2 палочки так, чтобы осталось 2 квадрата, 3 квадрата, переложить 3 палочки, чтобы осталось 3 квадрата и т. д.

б) Из 6 одинаковых палочек составить 4 равных треугольника (составить треугольную пирамиду).

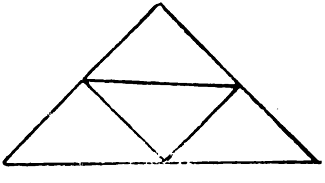
2. Упражнения, связанные с комбинированием фигур. Например, известная китайская задача танга: из 7 частей квадрата сложить фигуры различных предметов (2 класс).

3. Задачи на определение числа известных геометрических фигур. Примеры:

а) Сколько треугольников и четырехугольников на чертежах?

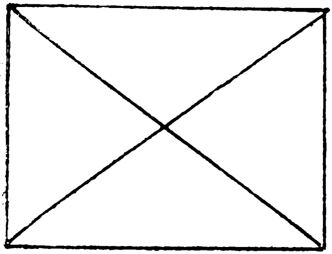


Черт. 1.



Черт. 2.

Рис. 4.



Черт. 3.
Рис. 4.

Не всем учащимся сразу удается на черт. 1 увидеть 8 треугольников, на чертеже 2—6 четырехугольников, на черт. 3—8 треугольников. (Задание по черт. 1 давалось во 2-х классах на олимпиаде).

б) Сколько острых углов на этом чертеже? (3 класс).

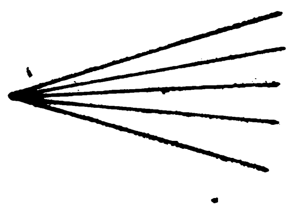


Рис. 5.

Интересно, что Вова М. предложил подсчитывать углы, используя «правило» соединений, т. е. учесть $\angle 1$, затем угол, состоящий из $\angle 1$ и $\angle 2$, угол — из $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$, угол — из $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 2$, угол — из $\angle 2$ и $\angle 3$, угол из $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 3$, угол — из $\angle 3$ и $\angle 4$ и наконец, $\angle 4$. Итого всего: $4+3+2+1=10$ (углов). (Аналогично выше подсчитывалось число прямоугольников Андрюшей Я.).

V. Большое место отведено на занятиях кружка вопросам познавательного характера, расширяющим общий математический кругозор учащихся. В своем большинстве этот материал не является программным, однако вполне соответствует уровню умственного развития учащихся данного возраста.

Так в 1 классе были рассмотрены вопросы и задачи, связанные с понятием масштаба, применением арифметической линейки.

Во 2 классе учащиеся знакомились с простыми числами, составляли таблицу простых чисел в пределах 100 способом Эратосфена и применяли ее для определения делителей числа. Решались задачи комбинаторного характера, например, составление всевозможных чисел, используя данные цифры, подсчет сыгранных партий и т. д.

Учащиеся познакомились с римской системой нумерации, научились читать и записывать числа в этой си-

стеме. В III классе продолжили изучение этой темы для чисел первой тысячи. Им было дано понятие о множестве, сами учащиеся приводили примеры конечных множеств, находили объединение и пересечение таких множеств, давали примеры равносильных конечных множеств.

Много внимания было уделено правилам производства действий над числами (сложение, вычитание, умножение) на счетах.

Рассматривался некоторый исторический материал: «Как люди научились считать», «Первые шаги в измерении времени», «Старинный способ умножения, умножение на пальцах», «Палочки Непера», «Пятиричная система счисления».

Эти вопросы вызывают у ребят большой интерес. Такие, как Андрюша Я., Игорь Е. (III класс) стали интересоваться популярной литературой по математике, особенно занимательной.

Все это оказывает большое влияние на развитие познавательной деятельности учащихся.

VI. Почти на всех занятиях ставились вопросы, способствующие повышению вычислительной культуры учащихся и закреплению навыков счета. С этой целью более подробно останавливались на изучении арифметических законов и применении их в вычислениях, знакомились с некоторыми частными приемами устного счета.

Упражнения «как быстрее сосчитать?» чередовались с числовыми «лабиринтами», «занимательными квадратами». Форма соревнований придавала этой работе особый интерес, не только способствующий точности вычислений, но и активизирующий деятельность ребенка. Иногда для решения поставленной задачи способом испытаний учащимся приходится подсчитывать результат до 20 различных комбинаций в течение 10—15 минут.

Например, выполняя упражнение, в котором требовалось с помощью знаков сложения, вычитания, умножения (с применением скобок) соединить числа, записанные цифрами 1 2 3 4 5 6 7 8 9 так, чтобы в результате получилось 100 (III класс), за 15 минут были составлены следующие примеры:

$$1\times2+34+56+7-8+9=100;$$

$$12-3-4+5-6+7+89=100;$$

$123+4-5+67-89=100;$

$123+45-67+8-9=100;$

$123-45-67+89=100;$

$123-4-5-6-7+8-9=100;$

$(1+2+3+4)\times 5+67-8-9=100;$

$[(1+2)\times 3+4+5]\times 6-7+8-9=100$ (квадратные скобки использовались нами еще во II классе).

При этом некоторые из ребят составили по 2 — 3 примера. Подобная работа, конечно, способствует закреплению вычислительных навыков.

VIII. Нельзя не отметить положительного значения для активизации познавательной деятельности учащихся упражнений, развивающих внимание, мы бы сказали, математическое внимание, но такого термина, к сожалению, как в педагогической, так и психологической литературе нет. Для изучения математики важно не просто внимание ко всякого рода фактам, а умение обратить его на самые существенные из них, от которых зависит решение данной познавательной задачи. Не всякий внимательный человек может обладать «математическим вниманием». Развитию такого внимания могут способствовать задачи, подобные следующим:

а) У девочки было 5 яблок. Одно яблоко она переложила из одного кармана в другой. Сколько яблок у девочки стало после этого? (I класс).

б) Тройка лошадей пробежала 9 км. Сколько пробежала каждая лошадь? (I класс).

в) По какому правилу записан ряд чисел?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Написать еще несколько чисел этого ряда. (2 класс). Ясно, что для ответа на этот вопрос только одного внимания недостаточно.

г) Как, не производя записи, получить число, большее 66 на 33, если число 66 написано на листочке бумаги? (II класс) и т. д. Такого рода задачи отнесены к занимательным, однако это не умаляет их значения для общего математического развития учащихся начальных классов.

Члены кружка принимают самое активное участие в организации и проведении так называемых «арифметических часов» для учащихся всего класса.

Основной целью таких занятий является повышение познавательного интереса к математике со стороны всех учащихся класса. Поэтому рассматриваемые на них вопросы обычно являются лишь углублением программного материала, основное же внимание уделяется практической значимости математики в жизни человека.

Раскрытие «тайны» арифметических «фокусов» вызывает у ребят огромное желание познать математические законы. Стихотворная форма некоторых высказываний вносит в эти занятия элемент занимательности. А соревнования и устные викторины вызывают даже у самых отстающих учащихся желание заниматься математикой. Как уже было сказано, эти занятия почти самостоятельно проводятся членами кружка. Под руководством учителя подбирается материал и распределяется между участниками. Назначается и ведущий. Надо отметить, что дети с большой ответственностью относятся к заданиям.

Заметные успехи в математике (повышение успеваемости и прилежания) дают право любому учащемуся стать членом кружка. Так, в III классе, например, в кружок были приняты Аня К., Лариса К., Оля Д.

В 1965/66 учебном году по составленным нами планам-конспектам проводились занятия математического кружка во вторых классах школ № 1 (2-д, учительница Кузнецова Г. И.) № 10 (учительница Чухманова М. Д.), № 23 (учительница Досова З. Е.) г. Мелекесса, а также во II классе школы № 162 г. Куйбышева (учительница Бахирева М. Н.).

Два года работы в экспериментальных классах школы № 1 г. Мелекесса (2-б и 3-а, учителя Ходотович Н. В. и Стрельцова А. Ф.) показали, что кружковая работа по математике оказала на математическое развитие учащихся этих классов большое положительное влияние. Общая успеваемость учащихся этих классов резко возросла по сравнению с успеваемостью учащихся контрольных классов.

Для установления и сравнения уровня и качества знаний учащихся экспериментальных и контрольных классов мы использовали:

1) анкетные данные — с целью выявления повышенного интереса к математике;

2) результаты специально проводимых контрольных работ;

3) контрольных работ, проводимых администрацией школы;

4) результаты математической олимпиады;

5) психолого-педагогические характеристики, которые составляются нами на каждого учащегося, являющегося членом кружка, дающие возможность последовательно проследить процесс продвижения ученика в его математическом развитии. Особое внимание уделяется наблюдению за развитием его познавательной активности.

Остановимся на некоторых полученных нами данных.

Начиная эксперимент, мы провели индивидуальную беседу с учащимися 2-а (экспериментального) класса (1964/65 уч. год). Нас интересовали следующие вопросы: какой предмет нравится больше всего? Почему? Чем больше всего нравится заниматься дома? Есть ли что-нибудь интересное в изучении арифметики?

Из 44 человек 20 учащихся отнесли арифметику к предметам, которые им нравятся, назвав при этом и другие. Лишь два ученика отдали предпочтение только арифметике, отметив, что им нравится решать задачи. Ни один ученик не называл домашнюю работу по арифметике любимым занятием.

Через год мы провели письменное сочинение в 7-ми третьих классах школ № 1 и № 23 г. Мелекесса на тему: «Чем я люблю заниматься в школе и дома?» (давалось на уроке русского языка).

Содержание сочинений 250 учащихся показало основной круг их интересов. 170 человек наряду с другими предметами (чтение, письмо) включили в число любимых и арифметику, 23 из них указали только ее. Характерно, что 30 процентов из этих 23 учащихся составили ученики экспериментального 3-а класса, в то время как на другие падает лишь по 11 процентов. Семь человек из этого же класса отметили, что любят заниматься математикой и дома. И только один учащийся из других шести классов отметил то же самое. Приведем выдержку из сочинения Вадика С. (экспериментальный класс) «...В классе я люблю решать трудные и интересные задачи. Мне очень нравятся занятия кружка, потому что

там интересные задачи... Люблю делать домашние задания по арифметике».

Приведенные данные говорят, что работа математического кружка в течение даже одного года повысила интерес учащихся к этому предмету.

Чтобы можно было судить о качестве знаний по математике учащихся экспериментальных классов, приведем результаты олимпиады, которая проводилась в марте 1966 г. для учащихся пяти вторых классов и трех третьих, включая контрольные и экспериментальные. Каждый класс был представлен одинаковым числом лучших (по мнению учителя) учеников.

Учащимся 2-х классов была предложена следующая работа:

1. Из 2-х клубков шерсти можно связать 3 детских шапочки. Сколько таких клубков нужно иметь, чтобы связать 9 детских шапочек? Написать только ответ (3 очка).

2. У Саши и Нади было вместе 30 конфет. После того, как они съели по одинаковому числу конфет, у Саши осталось 9 конфет, а у Нади 5. По сколько конфет они съели? (3 очка).

3. Сколько треугольников и прямоугольников на этом чертеже? (За верный подсчет числа треугольников — 3 очка, прямоугольников — 2 очка).

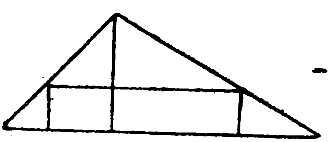


Рис. 6.

4. Даны числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Складывая по 3 числа из этого ряда, получить как можно больше различных примеров с ответом 15. (За каждый пример 0,5 очка).

Результаты даны в таблице 1. См. стр. 17.

Примечание.

Во 2-д классе работает математический кружок под руководством учителя в течение одного учебного года. (Класс не экспериментальный).

Учащимся 3-х классов было предложено следующее задание:

1. Пирог весит столько, сколько четверть пирога, да еще 900 г. Сколько весит пирог? (3 очка).

Класс	Число участников	Верно дали ответ в № 1.	Верно решили № 2	Верно определили число треугольников	Верно определили число прямоугольников	Составили не менее 8 примеров	Общее число очков
2 а	7	—	—	—	1	1	20,5
2 б (экспериментальный)	7	6	6	1	3	4	65
2 в	7	3	1	—	1	—	31,5
2 г	7	2	1	—	—	—	26
2 д	7	2	—	—	5	2	35,5

2. Найти двузначное число, которое при делении на 3, 4 и 5 дает в остатке 1 (2 очка).

3. Сколько прямоугольников на чертеже? (2 очка).

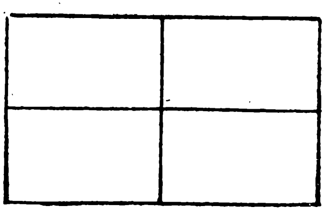


Рис. 7.

4. Найти неизвестные цифры в примере

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} ?\;?\;? \\ ?\;2 \end{array} \\ \hline 6\;?\;? \\ ?\;?\;?\;4 \\ \hline ?\;1\;?\;3\;6 \end{array}$$ (3 очка).

5. Сколько различных трехцветных флажков можно составить, имея ленты 4-х цветов: красные, голубые, си-

ние, белые? Написать только ответ (3 очка). Результаты видны из следующей таблицы:

Таблица 2

Класс	Число участников	Верно решили № 1	Дали верный ответ в № 2	Дали верный ответ в № 3	Верно решили № 4	Дали верный ответ в № 5	Общее число очков
3 а (экспериментальный)	10	10	10	5	10	7	111
3 б	10	8	6	4	6	8	86
3 в	10	9	9	—	6	6	81

Заметим, что с учащимися экспериментальных классов подобные задачи до олимпиады не решались, поэтому все учащиеся были в относительно равных условиях. Результаты зависели в основном от уровня математического развития детей. Конечно, успехи учащихся экспериментальных классов по сравнению с учащимися контрольных, может быть, нельзя полностью отнести только за счет кружковой работы, тем не менее, ясно, что она сыграла в этом немаловажную роль.

Таким образом, только эти приведенные данные уже говорят о том, что кружковая работа по математике оказывает большое положительное влияние на развитие познавательной активности учащихся младшего школьного возраста.

А. А. ЮРЬЕВА

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТРЕБОВАНИЯХ К СОСТАВЛЕНИЮ СИСТЕМЫ УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

Проектом программы по математике для средней школы (издание 1967 года) предусматривается значительная перестройка преподавания математики как по содержанию, так и по характеру изучения. В связи с

этим встает вопрос об учебниках и задачниках по математике для средней школы.

Ныне действующие задачники не имеют достаточно хорошо разработанной системы упражнений, направленной не только на углубление и закрепление теоретического материала, но и на обучение учащихся умению самостоятельно решать задачи средней и повышенной трудности. С этой целью система упражнений должна быть тщательно продумана, особенно для младших классов восьмилетней школы (IV—VI классы). Система упражнений должна быть такой, чтобы содействовать выработке у учащихся более общих умений решать разнообразные задачи, чем умения решить какую-то определенную их категорию. Системой упражнений должно быть уделено внимание задачам практического характера. В задачнике по геометрии должны содержаться задания на составление задач вообще, а также задач практического характера в частности.

Нами был проанализирован стабильный задачник по геометрии для восьмилетней школы авторов Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой (Просвещение, 1966 год) с целью выяснить количество задач, способы их решения, сделанные авторами в конце задачника указания к задачам таких направлений:

1) задачи на отыскание наибольших и наименьших значений некоторых функций, решаемые элементарными средствами;

2) задачи логического характера;

3) задачи на вычисление и доказательство, решаемые с помощью метода геометрических преобразований;

4) задачи практического характера.

По курсу геометрии 6-го класса мы нашли в задачнике две задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций. Это — №№ 38, 139. Конечно, этого недостаточно для выработки умения решать задачи такого вида. Задач логического характера по курсу геометрии 6-го класса, относящихся к определениям понятий, к видам теорем, около десяти (№№ 59, 114 и др.).

Относительно задач, решаемых методом геометрических преобразований, нужно сказать следующее: они появляются в задачнике только в теме «Симметрия относительно прямой» (§ 8) (никакой пропедевтики ранее

в задачнике не наблюдается), и, в основном, это — задачи на построение. На доказательство не так уж много задач (№№ 137, 138, 141, 142), все они из § 8 стабильного задачника. В других параграфах есть задачи на доказательство и вычисление, которые можно решать с помощью свойств осевой симметрии (№№ 143, 149, 150 и др.), но авторы не предполагают такого решения. Задач практического содержания больше в задачнике, чем задач, рассмотренных выше, но составлению их силами учащихся внимания не уделяется.

Аналогичная картина имеет место и по седьмому классу.

В текущем учебном году нами была проведена контрольная работа по геометрии в 6—7 классах нескольких школ города с целью проверки состояния знаний учащихся по выделенным нами вопросам программы. Таким образом, контрольная работа содержала следующие задачи:

1) задачу на доказательство, решаемую с помощью метода геометрических преобразований;

2) задачу логического характера;

3) задачу практического характера;

4) задачу на отыскание наибольших и наименьших значений функций, решаемую элементарными средствами.

В VI классе были даны по три задачи в каждом из двух вариантов. Тексты задач следующие:

I вариант

1. Можно ли так сказать о прямой линии: «Прямая линия есть след точки, движущейся по одному направлению?».

Если можно так сказать, то почему; если нельзя, то тоже — почему.

2. Доказать, что если в треугольнике биссектриса угла делит его периметр пополам, то треугольник — равнобедренный.

3. Стороны треугольника выражаются в целых числах дециметров. Две стороны соответственно равны 1 дм и 7 дм. Найти третью сторону.

II вариант

1. Начертите линию, все точки которой одинаково удалены от одной точки и которая не является окружностью. Какие слова нужно поставить перед словом «линия» в предложении «.... линия, все точки которой одинаково удалены от одной точки, называемой центром, называется окружностью», чтобы это предложение служило определением окружности?

2. На биссектрисе внешнего угла B треугольника ABC взята точка M. Доказать, что периметр $\triangle$ ABC меньше периметра $\triangle$ AMC.

3. Доказать, что одна сторона треугольника меньше полупериметра его.

В VII классах контрольная работа была дана также в двух вариантах:

I вариант

1. В прямоугольном треугольнике, катеты которого 3 см и 4 см, отодвинем гипотенузу параллельно самой себе на 1 см. На сколько изменится периметр данного треугольника?

2. Точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника есть та точка на плоскости, расстояния которой от четырех вершин имеют наименьшую возможную сумму.

3. Можно ли определить прямоугольник как параллелограмм с равными диагоналями? (Если можно, то почему; если нет — то также почему).

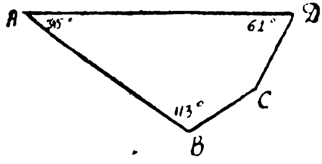


Рис. 1.

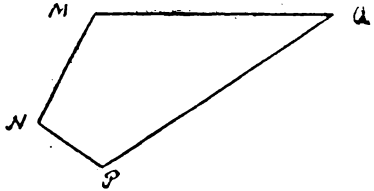


Рис. 2.

4. Даны два четырехугольника ABCD, MNPQ, стороны одного соответственно параллельны сторонам другого. Зная углы четырехугольника ABCD, найти углы че-

тырехугольника MNPQ (это задача № 322 из стабильного задачника по курсу 6-го класса).

II вариант

1. Разделить пополам угол, вершина которого недоступна.

2. Для какой точки O плоскости выражение $OA+$ $+OD-OB-OC$ имеет наименьшую величину, если A, B, C, D — вершины четырехугольника?

3. Можно ли определить ромб как параллелограмм со взаимно перпендикулярными диагоналями? Можно ли определить ромб как четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями? (Если да, то почему; если нет, то также почему).

4. Задача, аналогичная задаче первого варианта, только данные другие.

Нами было проанализировано, в общей сложности, 115 работ учащихся разных школ города. Какие же выводы можно сделать из анализа этих контрольных работ?

1. Ни один из учащихся 7-х классов (проанализировано 40 контрольных работ) не взялся за решение задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций. А это были простые задачи (I_2, II_2), как по содержанию, так и по способу решения.

2. Задача логического характера была связана с составлением других, равносильных известным учащимся, определений геометрических понятий. Так, в задаче II_3 никто из учащихся не ответил на второй вопрос задачи (можно ли определить ромб как четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями) ни положительно, ни отрицательно. Почти все учащиеся пытались доказывать теоремы:

а) если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то он — ромб;

б) если в параллелограмме диагонали равны, то он — прямоугольник; но многие учащиеся (13 из 38) в доказательстве опирались на то, что требуется доказать. Это — грубая логическая ошибка. Были учащиеся, которые не смогли правильно выделить условие и заключение этих теорем.

3. С решением задач, основанном на методе геометрических преобразований, все учащиеся 7-х классов не

смогли справиться. В задаче I_1 некоторые учащиеся не смогли верно сделать чертеж. Они чертили, например, так:

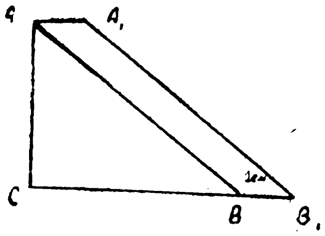


Рис. 13.

4. Была предложена учащимся 7-х классов также и задача практического характера с готовым чертежом. В задаче нужно было дать геометрическое доказательство вычислению углов второго четырехугольника. Учащиеся плохо справились с решением этой задачи, в лучшем случае решили ее неполностью, т. е. нашли величину только одного угла.

Аналогичную картину представляет анализ контрольной работы в 6-х классах. Из анализа 43 работ учащихся можно сделать вывод, что в задаче I_3 только двое учащихся дали верный ответ, но сам процесс решения задачи остался неясным, т. к. он не был описан учащимися. Возможно, что этим учащимся помогло сделать верный вывод построение, измерение и обобщение нескольких частных случаев решения. Строгого, логического доказательства учащиеся не смогли привести, так как не применили вторую часть теоремы о соотношении сторон треугольника. Задачу II_3 учащиеся также не решили. Вероятно, одной из причин послужило то, что учащиеся имеют формальное представление о неравенстве из курса алгебры, не знают практически свойств его. Не справились учащиеся с решением задач на доказательство (I_2, II_2), хотя решение их можно быстро получить с помощью свойств осевой симметрии.

Из анализа ошибок учащихся в контрольной работе можно судить не только о методическом уровне преподавания математики в школах города, но в некоторой степени и о тех учебниках и задачниках, по которым учащиеся занимаются; об их достоинствах и недостатках, в частности о стабильном задачнике по геометрии для восьмилетней школы.

Считаем, что в стабильном задачнике все еще мало уделяется внимания системе упражнений следующих направлений:

1) применению метода геометрических преобразований к решению задач на вычисление и доказательство;

2) задачам логического характера;

3) задачам практического характера;

4) задачам на отыскание наибольших и наименьших значений некоторых функций. В настоящее время в связи с обсуждением проекта программы по математике для средней школы нужно пересмотреть принципы составления задачников по математике, в частности задачника по геометрии, особенно для младших классов (IV—VI классы). Этим вопросом занимался В. А. Жаров (Ярославский пединститут). В своей книге «Основные принципы построения задачника по геометрии» (1960 год издания) автор выдвигает 5 основных методических принципов построения задачника по геометрии для восьмилетней школы. Это — следующие принципы:

«I принцип состоит в том, что в основу системы упражнений по геометрии предлагается положить идею геометрических преобразований».

«II принцип предполагает постепенное ознакомление учащихся с доступными им основными логическими понятиями геометрии на материале учебной программы».

«III принцип составления системы упражнений по геометрии требует того, чтобы задачник был пронизан идеей неразрывной органической связи теории и практики».

«IV принцип создания системы задач по геометрии есть принцип постепенной подготовки учащихся к решению разнообразных задач и к доказательству более сложных теорем посредством систематического устного решения односложных задач».

«V принцип предполагает в основу задачника по геометрии положить требование целостного изучения геометрических фактов и постепенного обобщения знаний учащихся в процессе их использования при решении задач». Автор предлагает решать с учащимися в определенной системе геометрические задачи комплексного характера, решение которых «не столько связано с оригинальностью способа решения, сколько с необходимостью использовать различные теоремы курса».

Мы не можем не согласиться с выдвигаемыми автором принципами построения задачника по геометрии для восьмилетней школы, но должны заметить, что пред-

лагаемые автором упражнения и задачи на каждый из принципов построения задачника не представляют собой системы упражнений в целом, соответствующей программе по геометрии.

Сделаем некоторые выводы:

В деле дальнейшего улучшения математического образования учащихся немаловажную роль играет задачник по математике, принципы его построения.

Система упражнений и задач, включенная в задачник, должна соответствовать не только пяти принципам, высказанным выше, но, по нашему мнению, также следующим требованиям:

1. Система упражнений должна развивать у учащихся оригинальность мышления.

2. Системой упражнений должно предусматриваться воспитание у учащихся умения производить проверку решения задач разнообразными способами.

3. Система упражнений должна воспитывать у учащихся умение составлять задачи; в задачнике должны быть соответствующие задания.

4. Система упражнений должна включать в себя задачи на отыскание наибольших и наименьших значений некоторых функций, решаемые элементарными способами, особенно задачи практического содержания.

5. Системой упражнений должны предусматриваться задачи на вычисление и доказательство, решение которых основано на свойствах геометрических преобразований.

В. М. ЛАГУНИН

ОБ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ РАБОТАХ В КУРСЕ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ

Одним из важнейших практических мероприятий по политехническому обучению является проведение измерительных работ. Проведение измерительных работ с последующей обработкой данных и графическим выполнением результата работ позволяет закрепить теоретические знания учащихся, полученные на уроках геометрии,

прививает навыки в работе с различными приборами, позволяет совершенствовать навыки вычислений с использованием правил приближенных вычислений, закрепляет графические навыки, полученные на уроках черчения.

В школах измерительные работы на местности проводятся как на уроках географии, так и на уроках математики.

Измерительные работы, проводимые в школе на уроках математики, должны знакомить учащихся не только со способами съемок. Главной задачей при проведении измерительных работ на уроках математики следует считать математическую сторону этих работ. Под этим мы понимаем знакомство учащихся со степенью точности измерений различными приборами и приспособлениями, умение учитывать ошибки измерений, применение теории (в частности теорем из геометрии) для различных измерений, умение оценивать шкалы различных инструментов, умение пользоваться этими шкалами. Особое внимание следует уделять вычислениям. При обработке данных измерений и различных вычислений следует придерживаться правила подсчета цифр или более строгих правил вычислений (вычисления со строгим учетом погрешностей).

Для проведения таких работ требуется подготовленный учитель математики. Программа по методике математики предусматривает подготовку такого специалиста.

Перечислим минимум работ, предусмотренный этой программой:

1. Работы, связанные с проведением и измерением отрезков прямых на местности. Повышение точности измерений и соответствующие инструменты.

2. Работы, связанные с проведением и измерением углов на местности. Повышение точности измерений и соответствующие угломерные инструменты.

3. Измерение недоступных расстояний и высот.

4. Съемка плана местности (небольшого участка).

5. Работа с планами, вычисление площади фигуры, переданной в соответствующем масштабе.

Программа по методике математики не предусматривает проведение геодезических съемок, а основное внимание уделяет повышению точности измерений, повышению точности измерительных приборов, умению из-

мерять площади различных фигур и, конечно, умению применять теоретические знания на практике.

Так как количество часов, отводимое на курс методики математики, тем самым и на раздел измерительных работ, невелико, то многие вопросы, связанные с измерениями на местности, следует студентам проработать самостоятельно. В настоящее время имеется достаточное количество различных учебных пособий и литературы по этой теме.

В этой статье мы познакомим студентов с вопросами, связанными с повышением точности приборов и применением прикладных средств для измерения площадей и расстояний.

Мы предлагаем следующие задачи:

1. Увеличение точности угломерных измерительных приборов, имеющихся в школе (построение шкалы Верньера).

2. Измерение площадей различных фигур с помощью самодельного планиметра-топорика.

3. Нахождение расстояний прикладными средствами с теоретическим обоснованием возможности таких измерений (дальномеры).

1. Увеличение точности измерительных приборов

Школы в основном имеют в наличии школьные астролябии или школьные угломеры. Точность измерений ими 1°. Учитель должен всегда быть заинтересованным в увеличении точности прибора. Точность школьной астролябии может быть доведена до 5′—10′ (минут). При наличии школьной мастерской и желания это сделать нетрудно.

Рассмотрим некоторые теоретические вопросы увеличения точности прибора. Точность увеличивается с помощью построения шкалы Верньера.

Возьмем на лимбе дугу AB, содержащую n делений с ценой деления лимба l (рис. 1). На круге алидады берется такая же дуга и делится на $n+1$ деление. Цена этого деления V. Эта дуга и будет дугой шкалы Верньера. Разность между ценой деления лимба и ценой деления Верньера V назовем точностью Верньера и обозначим через t.

$$t=l-V \qquad (1)$$

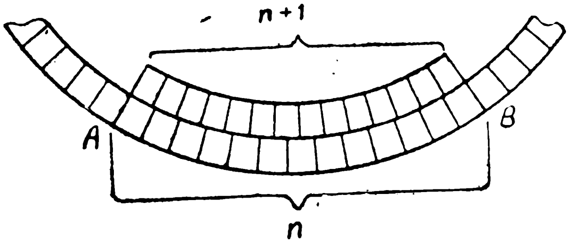


Рис. 1

Величина дуги АВ может быть выражена через цену деления лимба

$$\smile AB = n \cdot l$$

Эту же дугу можно выразить через цену деления Верньера

$$\smile AB = (n+1)V.$$

Отсюда

$$nl = (n+1)V$$

или

$$V = \frac{nl}{n+1}. \qquad (2)$$

Поставим значение (2) в (1).

Получим

$$t = \frac{l}{n+1}. \qquad (3)$$

Следовательно, точность Верньера есть частное от деления цены деления лимба на число делений шкалы Верньера.

Ниже рассматривается реконструкция школьной астролябии с построением на ней шкалы Верньера.

Вместо рейки алидады ставится круг, диаметр которого меньше диаметра лимба. На этом круге укрепляются диаметрально противоположно друг другу смотровой и предметный диоптры. Малый круг будет играть роль алидады.

Построим на алидаде шкалу Верньера, точность которой $t=10'$. Так как лимб школьной астролябии имеет цену деления $l=1°$, то из формулы (3) находим

$$10' = \frac{60'}{n+1},$$

откуда

$$n = 5.$$

Возьмем на лимбе дугу AB, равную 300′ ($AB=60'.5$). Такую же дугу построим на круге алидады и разделим ее на 6 частей. Каждую часть оцифруем от 0 до 60′ через каждые 10′. Оцифровку следует проводить в направлении движения часовой стрелки (совпадает с направлением отсчета лимба).

Чтобы приблизить процесс работы на такой астролябии к работе на современных геодезических приборах, а также уменьшить влияние ошибок прибора, следует построить две шкалы Верньера, расположенные диаметрально противоположно друг другу. Вид такого прибора показан на рис. 2.

Рекомендуем шкалу Верньера строить на плотной бумаге, а затем приклеить ее к кругу алидады.

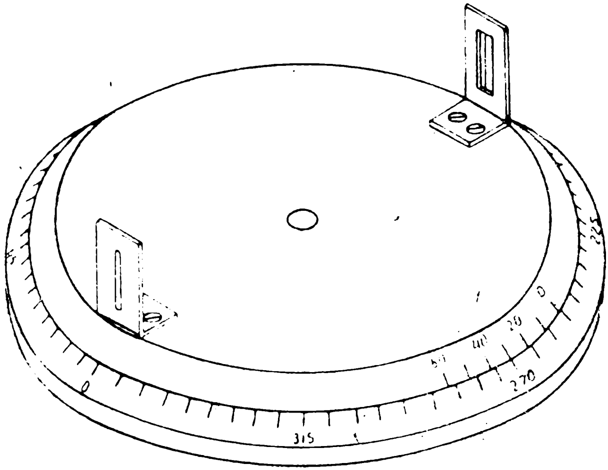


Рис. 2.

На рис 3 показан верньер для школьной астролябии с точностью $t=5'$.

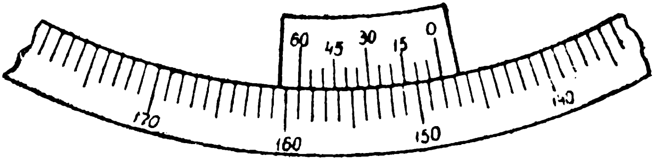


Рис. 3.

Правила пользования шкалой Верньера изложены во многих пособиях по геодезии, поэтому мы здесь их не приводим.

2. Измерение площадей планиметром-топориком

Измерение площадей правильных фигур или фигур, ограниченных ломаной линией, не представляет трудности. Наиболее трудным является измерение площадей криволинейных фигур. Для измерения площадей таких фигур используют палетки или планиметры.

В школьной практике вполне возможно использовать планиметры-топорики. При измерении они дают сравнительно малую ошибку 2—4 процента и вполне пригодны для вычислений.

Внешний вид прибора показан на рис. 4. Прибор делается из проволоки диаметром 4—7 мм.

Длина плеч $AB = ДC = 20—40$ мм.

$BC = 200—350$ мм

$\angle ABC = \angle BCD = 90°$.

Необходимо, чтобы вся фигура находилась в одной плоскости. Конец А заостряется, а Д расплющивается в виде топорика. На рис. 5 легко видеть порядок работы планиметром. Пусть требуется найти площадь фигуры М.

1. Находят приблизительно центр тяжести О фигуры М.

2. Соединяют точку О с контуром.

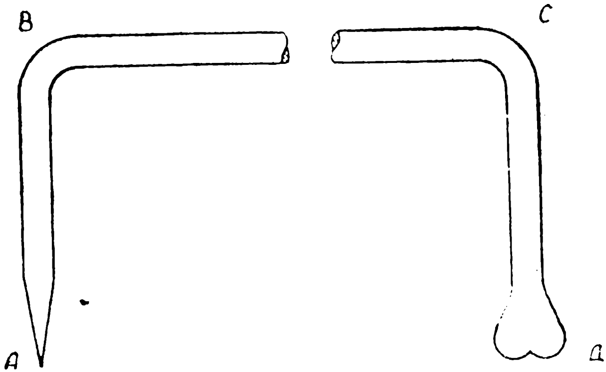


Рис. 4.

3. Острие планиметра помещают в точку О. Точка Е отмечается нажимом топорика.

4. Перемещают острие планиметра в направлении, указанном стрелкой, сохраняя вертикальное положение прибора.

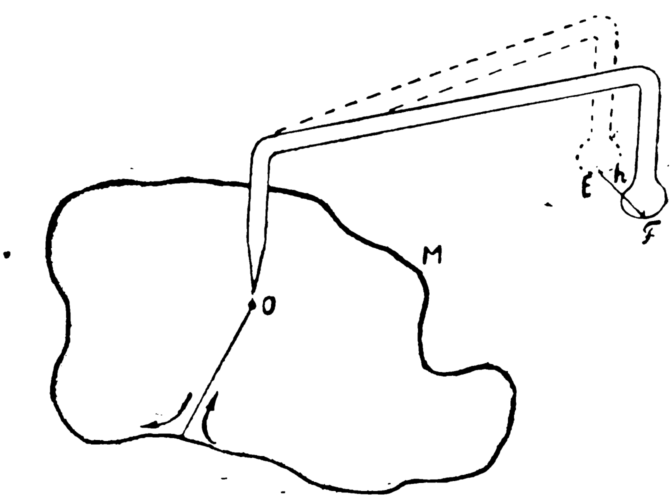


Рис. 5.

5. Как только точка A займет вновь положение 0, точка E займет новое положение F. Измерим расстояние

$$EF = h_1.$$

6. Ту же операцию проделаем второй раз, только обход делаем в противоположном направлении.

7. Измерив расстояние $E_1F_1 = h_2$, найдем некоторое число

$$Q = \frac{h_1 + h_2}{2}. \qquad (4)$$

Искомая площадь фигуры будет $S = k\,Q$, где k есть коэффициент пропорциональности данного планиметра. Он показывает, что отношение $\frac{S}{Q} = k$ есть величина постоянная (const).

Этот коэффициент легко определить для самодельного планиметра.

Для этого строится круг, диаметр которого равен $D = 100$ мм. Площадь этого круга легко высчитать аналитически.

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{31420}{4} = 7850 \text{ мм}^2.$$

Произведем несколько раз операцию, описанную выше, по нахождению площади построенного круга. Полученные результаты занесем в таблицу.

Таблица 1

№ измерений	h_1	h_2	Q
1	38,6	40,0	39,3
2	39,0	40,0	39,5
3	38,7	39,9	39,3
4	39,0	39,9	39,4
5	39,0	39,8	39,4
сумма	194,3	199,6	196,9
среднее	38,9	39,9	39,4

Отсюда $$k = \frac{S}{Q} = \frac{7850}{39,4} = 199 .$$

Зная коэффициент пропорциональности планиметра k, можно находить площади различных фигур. Желательно вначале, в целях тренировки, находить площади фигур, площадь которых может быть вычислена аналитически. Это необходимо для тренировки руки и глаза вычислителя.

Построение планиметра-топорика доступно для любой школы. Теория планиметра сложная, поэтому ее можно не давать учащимся. Студент же знакомится с теорией планиметра в курсе математического анализа.

3. Дальномер и другие прикладные средства измерения расстояний. Понятие «тысячной»

Практическое применение темы «Подобие фигур» обычно показывают на задачах по определению высоты предмета по его тени и тени предмета, высота которого известна, и на задачах ей подобных.

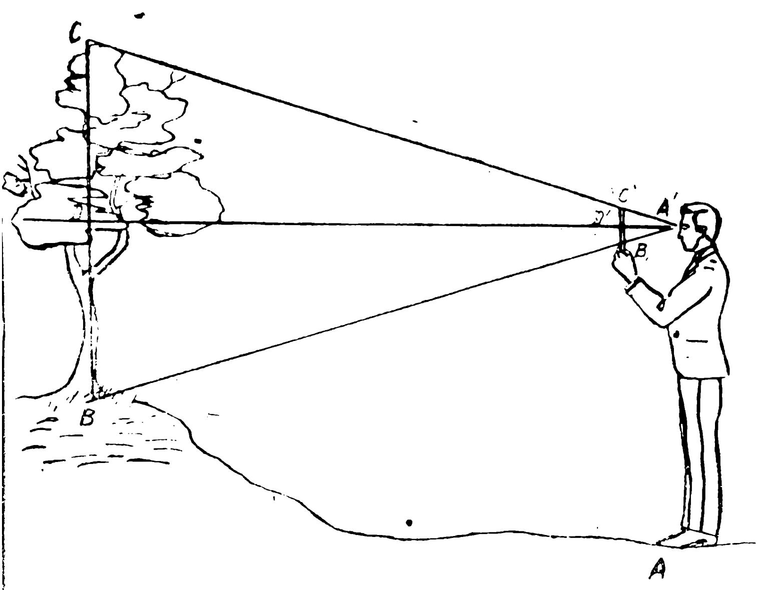


Рис. 6.

При прохождении темы «Подобие фигур» учащихся можно познакомить с принципом работы дальномера, с его устройством.

Дальномером называется прибор для определения расстояний без непосредственного их измерения. Принцип работы дальномера основан на подобии треугольников.

Пусть требуется определить расстояние от точки А до дерева ВС (рис. 6).

Обозначим элементы рисунка: А — точка стояния (наблюдения), A^1 — точка зрения,

ВС — дерево, размер которого известен и равен Н,

B^1C^1 — дополнительный предмет, размер которого H^1,

$A^1Д^1$ — расстояние от точки зрения до предмета B^1C^1, равное d^1,

$A^1Д$ — искомое расстояние до предмета, равное D.

Из рис. 6 видно, что $\triangle A^1B^1C^1 \sim \triangle A^1BC$, следовательно,

$$\frac{A^1D^1}{AD} = \frac{B^1C^1}{BC},$$

$$\frac{d^1}{D} = \frac{H^1}{H},$$

откуда

$$D = \frac{H}{H^1} \cdot d^1, \qquad (5)$$

Из формулы (5) видно, что для нахождения расстояния необходимо знать величину предмета.

Дальномерами могут служить линейка, карандаш, спичечная коробка, школьный дальномер (рис. 7).

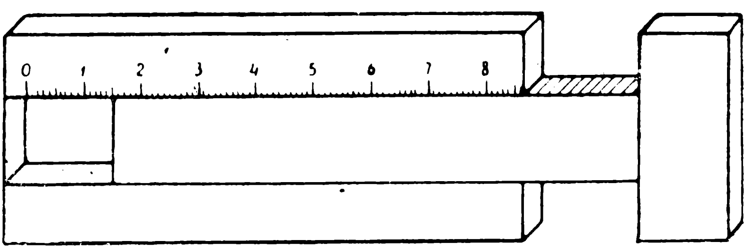


Рис. 7.

При пользовании дальномерами школьного типа следует приучить учащихся выносить дальномер на одно и то же расстояние перед глазом. Для этого первоначально следует провести тренировку. Привязав нитку нужной длины ($l = 50—60$ см) к дальномеру и взяв свободный конец в зубы, выносить дальномер перед лицом на длину нити. Со временем рука привыкает к выносу на одно и то же расстояние.

Рассмотрим задачу на нахождение расстояния с помощью дальномера.

Определить расстояние до железнодорожного вагона (рис. 8), если высота вагона H = 3,5 м покрывается

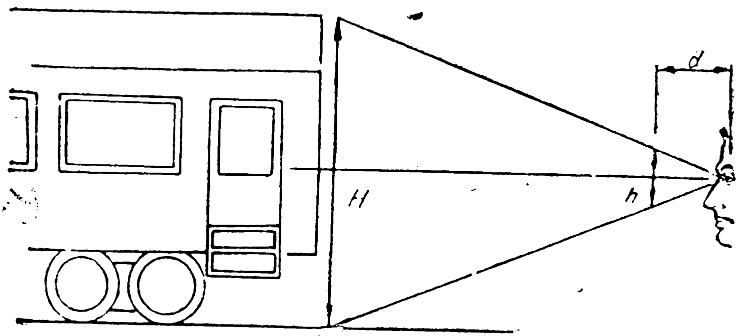


Рис. 8.

отрезком линейки h = 1 см. Линейка выносится перед наблюдателем на расстояние d = 0,6 м.

По формуле (5) находим

$$D = \frac{H}{h}\, d = \frac{3{,}5}{0{,}01}\; 0{,}6 = 210 \text{ м}.$$

В целях лучшего использования дальномеров в школьной практике, а также использования подручных средств при определении расстояний, следует учащихся, а соответственно и студентов, познакомить с понятием «тысячной».

«Тысячная» является единицей измерения углов в военном деле, в частности в артиллерии.

Центральный угол, стягиваемый дугой в $\frac{1}{6000}$ дли-

ны окружности, носит название «деление угломера» или «тысячной». Название «тысячная» объясняется тем, что длина такой дуги равна приблизительно $\frac{1}{1000}$ радиуса.

$$t = \frac{C}{6000} = \frac{2\pi R}{6000} \approx \frac{6{,}28}{6000} R \approx$$

$$\approx \frac{1}{955} R \approx \frac{1}{1000} R. \qquad (6)$$

Если считать, что наблюдатель находится в центре окружности, на которой лежит наблюдаемый предмет, то радиус окружности есть расстояние от наблюдателя до предмета. Если предмет виден под углом зрения в одну тысячную, то расстояние до предмета в 1000 раз больше размера предмета и, наоборот, размер предмета в тысячу раз меньше расстояния до него.

Угол в тысячных имеет своеобразную форму записи и чтения.

Таблица 2

Угол в тысячных	Записывается	Читается
1240	12—40	двенадцать, сорок
785	7—85	семь, восемьдесят пять
35	0—35	ноль, тридцать пять
1	0—01	ноль, ноль одна

Если вынести линейку на расстояние 50 см от глаза, то деление в 1 мм линейки будет соответствовать углу в две тысячных.

Это легко доказать.

При радиусе в 50 см углу в одну тысячную будет соответствовать дуга в 0,5 мм $\left(\frac{500 \text{ мм}}{1000} = 0{,}5 \text{ мм}\right)$, а углу в две тысячных будет соответствовать дуга в 1 мм.

Это свойство широко используется в простейших дальномерах.

В таблице 3 даны углы зрения различных предметов, которые могут быть использованы как подручные средства измерения расстояний при выносе их на 50 см.

Таблица 3

Выносимый предмет	Угол зрения в тысячных
Круглый карандаш	0—16
Двухкопеечная монета	0—36
Трехкопеечная монета	0—44
Длина спичечной коробки	1—00
Ширина спичечной коробки	0—74
Высота спичечной коробки	0—32
Ширина ладони	1—20 до 1—80
Длина спички	0—90
Толщина спички	0—04

Рассмотрим возможность определения расстояния или размеров с помощью «тысячных».

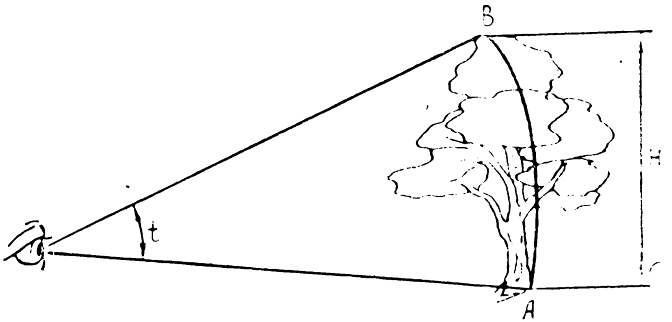


Рис. 9.

Если обозначить дугу АВ чере Т (рис. 9), АО через D, угол $\angle$ АОВ в тысячных через t, то длина дуги Т будет равна

$$T = \frac{t \cdot D}{1000}. \qquad (7)$$

При малых углах (до 18° или до 300 тысячных) дугу АВ можно считать равной Н, т. е.

$$T = H.$$

Тогда формула (7) примет вид

$$H = \frac{t \cdot D}{1000} \tag{8}$$

или

$$D = \frac{H \cdot 1000}{t}. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) используются при определении размеров тела и расстояния до него.

Пример 1. Определить расстояние до трубы высотой $H = 16$ м, если угол зрения 12 тысячных (0—12).

По формуле (9) находим

$$D = \frac{16 \cdot 1000}{12} = 1333 \text{ м}.$$

Пример 2. Определить расстояние до телеграфного столба, если он покрывается наименьшим ребром спичечной коробки. (Вынос коробки 50 мм).

Из таблицы 3 находим угол зрения $t = 0$—32.

Из таблицы 4 находим, что высота телеграфного столба $H = 8$ м, тогда

$$D = \frac{8 \cdot 1000}{32} = 250 \text{ м}.$$

Таблица 4

№№ п-п	Предмет	Размер в метрах
1.	Расстояние между телеграфными столбами	50
2.	Высота телеграфного столба . .	8
3.	Высота индивидуального дома .	3—4
4.	Диаметр колеса машины ЗИЛ	1,0
5.	Длина машины ЗИЛ .	5,5

№№ п-п	Предмет	Размер в метрах
6.	Высота железнодорожного вагона .	3,5
7.	Рост человека .	1,7
8.	Высота дерева .	10
9.	Длина товарного вагона . .	6

В заключение хочется добавить, что будущий учитель будет совершенствовать средства измерений, тесно связывать измерения с теорией, изучаемой на уроках математики, знакомить детей не только с самодельными инструментами, но и с современными геодезическими приборами.

В. М. ЛАГУНИН

О МЕТОДИКЕ СОСТАВЛЕНИЯ ПРОГРАММИРОВАННЫХ ПОСОБИЙ

В статье излагается методика построения разветвленной программы программированного пособия по небольшой части изучаемого курса.

Статья предназначена для студентов физико-математического факультета и учителей физики и математики школ, но положения, рассматриваемые в ней, могут быть применены для написания программированных пособий по любой учебной дисциплине.

Написание данной статьи вызвано тем, что многие учителя школ с большим желанием хотели бы применить программированное обучение в своей работе. Но использование различных обучающих машин как в школах, так и в вузах в силу ряда обстоятельств затруднено. Учителя не имеют также пособий, выпущенных массовым тиражом.

Между тем программированное обучение можно вести с помощью программированных учебников или пособий, написание которых возможно силами отдельных учителей или коллектива учителей.

Автор ставит перед собой скромную задачу — помочь составителю в деле написания небольших програм-

мированных пособий по отдельным темам или разделам учебного курса.

В работе рассматриваются следующие этапы написания программированного пособия:

1. Изучение учебной программы и согласование ее со специальными потребностями обучения.

2. Сбор материала.

3. Выделение изучаемых правил и расположение их в логически связанной последовательности путем составления матрицы.

4. Составление поточной диаграммы.

5. Расположение порций изучаемого материала по определенным страницам составляемого пособия с помощью графов.

Прежде всего отметим те требования, которые нужно помнить составителю программированного пособия:

1. Составитель должен четко сформулировать цель обучения.

2. Он должен тщательно продумать расположение материала, которое гарантировало бы успех при некотором напряжении умственных сил.

3. При написании программы составитель должен предвидеть те затруднения, которые могут возникнуть перед обучаемым, а поэтому заранее внести в программу материал, обеспечивающий подсказку или подкрепление.

4. Составление программы программированного пособия должно быть согласовано не только с учебной программой, но и с теми задачами, которые вытекают из потребностей учащихся.

I этап. Изучение учебной программы и согласование ее со специальными потребностями обучения. Любой учебный предмет обусловлен учебной программой. В ней указан необходимый минимум, который должны получить учащиеся в процессе обучения. Каждый учитель, ведущий предмет, хорошо знаком с программой. Но бывает так, что в силу некоторых обстоятельств для учащихся необходимо знание какого-то материала, которого в программе нет (учителя математики это хорошо знают). Бывает и так, что некоторый материал программы изучен раньше. На первом этапе составления программы составитель должен все это хорошо изучить, сопоставить и решить о внесении или устранении какого-

либо материала. Нужно также обращать внимание на специфику будущей работы обучаемого (это относится к специальным учебным заведениям).

II этап. Сбор материала. На этом этапе составитель подбирает материал, относящийся к изучаемой теме. При этом он может пользоваться различными учебниками, учебными пособиями, научными журналами и другой информацией. Он собирает сведения и факты, которые могли бы расширить понимание изучаемого материала, наглядно проиллюстрировать его содержание.

В целях расположения материала по различной значимости, составителю следует завести картотеку. На наш взгляд, в этой картотеке собранная информация должна располагаться не только по темам, но и по принципу значимости, т. е. «обязан знать», «должен знать», «может знать».

III этап. Выделение изучаемых правил и расположение их в логически связной последовательности с помощью составления матрицы. Прежде всего отметим, что мы будем понимать под «правилом». Вводимое здесь понятие «правило» включает в себя не только правила, которые мы имели в любом предмете, но под это понятие будут подходить различные регламентированные действия, отдельные части сложных правил, некоторые предложения, фигуры и т. д. Примером таких правил могут служить следующие выражения: «электрон является основной единицей заряда», «энергия измеряется в джоулях», «распознавание треугольника АВД», «угол С принадлежит треугольнику АВС» и другие.

В каждой конкретной области можно найти предложения, которые будут подходить под принятое выше понятие «правила».

Следует заметить, что процесс выделения правил является самым трудоемким процессом при составлении программированного пособия.

Выделив правила, программист располагает их в логически связной последовательности. Под логически связной последовательностью мы понимаем такое расположение правил, когда каждое последующее правило как-то связано с предыдущим. В этом случае большую помощь оказывает матрица. Матрица представляет из себя квадрат, состоящий из клеточек. Размер квадрата (количество клеточек на стороне) определяется числом

выделенных правил. Выделенные правила строго нумеруются и номера их записываются последовательно в клеточках, расположенных на диагонали квадрата. Эту линию мы будем называть **определяющей линией** матрицы (рис. 1).

1									
	2								
		3							
			4						
				5					
					6				
						7			
							8		
								9	
									10

Рис. 1.

Все правила находятся между собой в некотором соотношении. Имеется три вида отношений:

1. Отношение связи.
2. Отношение различения.
3. Отношение отсутствия связи.

Если между правилами 1 и 3 имеется отношение связи, то мы будем клеточку на пересечении первой строки и третьего столбца матрицы штриховать.

Если между правилами 1 и 5 имеется отношение различения, то клеточку на пересечении первой строки и пятого столбца закрасим сплошным цветом.

Если между правилами 1 и 4 имеется отношение отсутствия связи, то клеточку на пересечении первой строки и четвертого столбца оставим чистой (см. рис. 2).

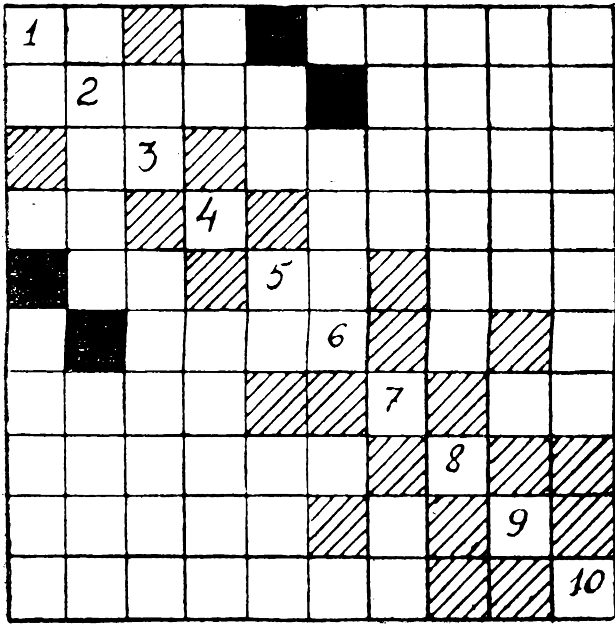


Рис. 2.

На рис. 2 можно видеть, что между правилами 1 и 3, 3 и 4, 4 и 5 и т. д. имеются отношения связи, а между правилами 1 и 5, 2 и 6 — различения.

Составление матрицы состоит в установлении и написании на матрицу существующих между правилами отношений (на матрице заштриховываются или закрашиваются соответствующие квадраты).

Порядок составления матрицы следующий. Вначале рассматриваются правила 1 и 2. Если между ними имеется отношение связи, то квадрат, расположенный на первой строке во втором столбце, штрихуется. Если же между правилами 1 и 2 имеется отношение различения, то этот квадрат закрашивается в сплошной цвет.

Если же между правилами 1 и 2 имеется отсутствие связи, то этот квадрат остается незакрашенным. Далее переходят к определению отношений между правилами 1 и 3, 1 и 4 и т. д., при этом соответствующие квадраты закрашиваются. Как только будут выяснены отношения между всеми правилами и будет заполнена часть матрицы выше определяющей линии, приступают к определению отношений между правилами, рассматривая их в обратном порядке. В результате заполняется нижняя часть матрицы относительно определяющей линии. Такое рассмотрение отношений между правилами позволяет контролировать правильность определения отношений.

При правильном определении отношений получается симметрично окрашенная относительно определяющей линии матрица.

Если правила расположены в логически связной по-

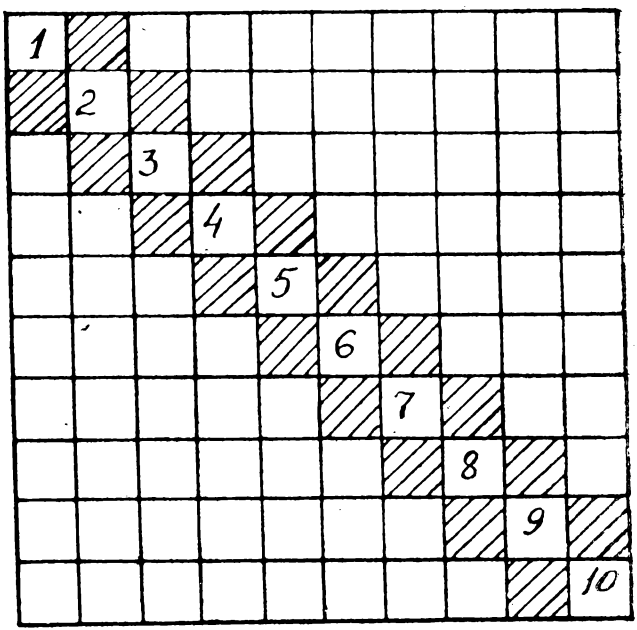


Рис. 3.

следовательности, то заштрихованные квадраты расположены вдоль определяющей линии (рис. 3).

Такую матрицу называют идеальной матрицей.

В общем случае такую матрицу получить трудно. Чаще всего в составляемой матрице последовательность заштрихованных квадратов, прилегающих к определяющей линии, нарушается. Появляются разрывы (незакрашенные квадраты). Появление разрывов является результатом неправильной последовательности правил, неправильного выбора места правила, пропуска отдельных правил, включения в последовательность сложного правила или другой какой-либо недоработки.

Составленная матрица может оказать большую помощь при устранении вышеуказанных недостатков выбора правил.

На рис. 4 и 5 показаны примерные образцы матриц,

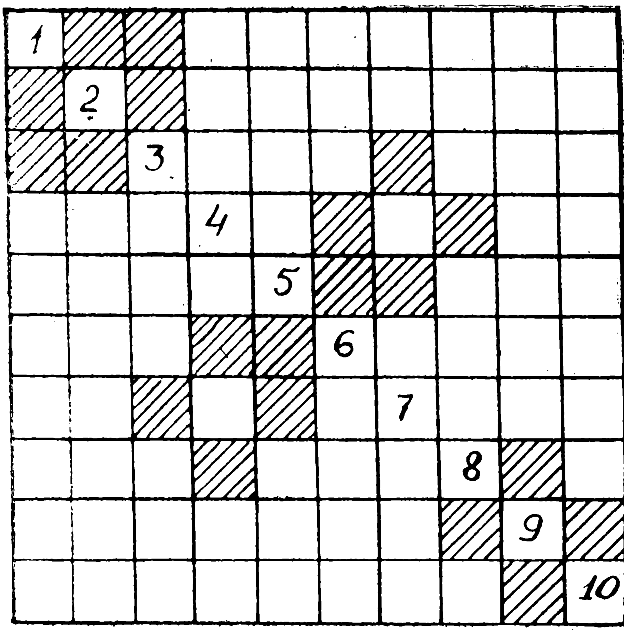


Рис. 4.

которые указывают соответственно на перестановку правил и неправильный выбор места для правила.

Перестановка правил может быть замечена при наличии так называемого «мальтийского креста» (рис. 4). Здесь имеется перестановка правил 4 и 7. Квадрат на четвертой строке в 7 столбце остается незакрашенным, а вокруг него в виде креста расположены заштрихованные квадраты. Если переставить правила 4 и 7 местами, то получим матрицу с заштрихованными квадратами вдоль определяющей линии, как на рис. 3.

Неправильный выбор места для правила может быть замечен на матрице (рис. 5). Здесь правила 2 и 3 имеют разрыв, но каждое из них связано с правилом 7. Если поставить правило 7 между правилами 2 и 3, то разрыв будет ликвидирован.

Разрыв между правилами может указывать и на пропуск какого-либо правила. В этом случае этот раз-

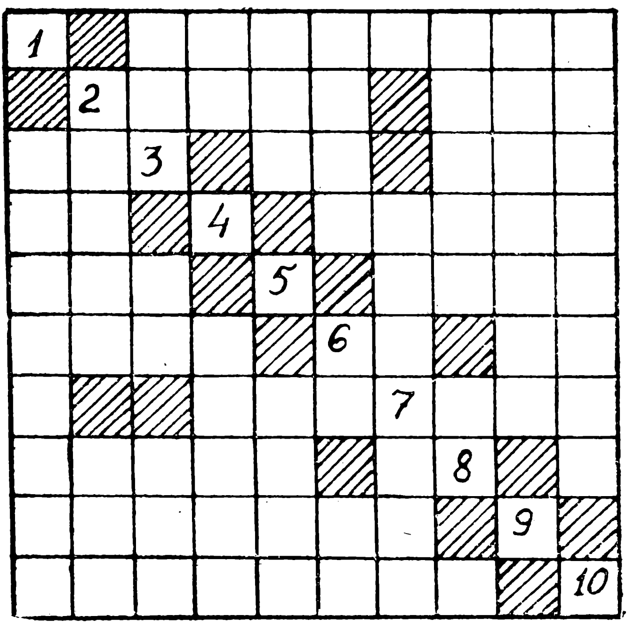


Рис. 5.

рыв нельзя ликвидировать перестановкой правил и следует искать ошибку в выборе правил. То же самое мы имеем и при сложном правиле. В этом случае нужно расчленить его на простые правила.

Разрыв между правилами может быть обусловлен и внутренней природой изучаемого материала. (В приложении мы встретимся с такого вида разрывом). Такой разрыв ликвидировать нельзя. Таким образом, путем критического анализа составленной матрицы, перестановкой правил, можно добиться расстановки правил в логически связанной последовательности.

IV этап. Составление поточной диаграммы. Как известно, при программированном обучении изучаемый материал дается обучаемому отдельными порциями. Каждая порция выполняет вполне определенные, ей присущие функции, цель которых:

1) преподнести обучаемому правило;
2) привести пример, подводящий к правилу;
3) привести пример, подкрепляющий правило;
4) подготовить обучаемого к восприятию нового правила;
5) дать алгоритмы решения задачи;
6) дать подсказку в решении задачи и т. д.

Мы будем различать следующие порции:

1. Порции, цель которых преподнести правила.
2. Порции, цель которых иллюстрирование правила на примерах, подтверждение правила.
3. Порции, содержащие различение правил.
4. Порции, содержащие подсказку.

Эти порции будем соответственно обозначать буквами П (правило), И (иллюстрация), Р (различение) и С (подсказка).

После составления матрицы с логически связной последовательностью правил, составитель приступает к построению поточной диаграммы.

Поточная диаграмма представляет график планированного распределения последовательности порций программированного пособия с указанием функций, которые выполняет каждая порция.

Поточная диаграмма имеет вид разграфленной сетки, на вертикали которой откладываются номера правил, а на горизонтали порции, необходимые для передачи информации и ее усвоения. Количество порций, необходи-

мое для усвоения и подачи правила, определяется составителем, исходя из его опыта работы, подготовкой учащихся, степенью трудности правила. Определение этого количества субъективно. Но тем не менее мы можем указать некоторые закономерности, которые позволяют определить число порций на изучение отдельных правил.

Каждая поставленная задача имеет свое решение. Любая сложная задача состоит из простых задач. Для решения простых задач имеется алгоритм (руководство, правило) решения.

Следовательно, если мы хотим, чтобы ученик уяснил то или иное правило, необходимо выяснить, сколько потребуется алгоритмов для успешного его усвоения. Это и позволяет определить количество порций на то или иное правило.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	И	И	П	И																					
2					И	П	И																		
3								П	И	И										Р					
4											П	И	И	С											
5															И	И	П	И							
6																			П	Р	И	И			
7																							И	П	И

Рис. 6.

На рис. 6 дается образец заполненной поточной диаграммы. По ней составитель видит, что на изучение правила 1 требуется 4 порции, из которых две предшествуют введению правила, третья дает правило и четвертая подкрепляет это правило примером.

На изучение правила 2 потребовалось три порции.

В правиле 4 составитель считает нужным ввести подсказку для решения какого-то примера, что и отмечено в 14 столбце.

Условное обозначение порций может быть различно. Составитель сам может по своему усмотрению обозначить порции различными символами.

Поточная диаграмма очень помогает в распределении материала.

V этап. Расположение порций изучаемого материала по соответствующим страницам пособия с помощью графов. После составления поточной диаграммы определяют количество разветвлений по каждому вопросу.

При разветвленной программе на каждый вопрос дается несколько ответов, из которых один верный. Количество таких ответов может быть произвольно. Следует помнить, что ответы должны учитывать характерные ошибки, которые встречаются по данной теме. Выдуманных ответов давать не следует. После этого определяют количество страниц пособия. Оно равно сумме количества порций и количества ответов на поставленные вопросы.

Чтобы легче было ориентироваться в распределении порций по страницам и видеть, какие из них использованы, а какие нет, можно использовать таблицу, на которой подряд стоят номера страниц 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 и т. д.

По мере использования какой-либо страницы ее номер зачеркивается. Это поможет видеть, какие страницы уже заняты порциями, какие нет. Одновременно идет заполнение таблицы графов.

Графом называется геометрическая конструкция на плоскости, состоящая из вершин и ориентированных дуг, соединяющих некоторые из вершин. На рис. 7 показан пример построения графа.

На страницах 1, 6, 9 расположены правила 1, 2 и 3. На графе эти вершины обозначены числами 1, 6, 9.

После изучения правила 1, обучаемый направляется к странице 2, на которой имеется вопрос и два ответа.

Один из ответов отправляет обучаемого к странице 3, другой ответ направляет к странице 5. На странице 3 ответ неправильный. Программа заставляет обучаемого обратиться к странице 1, изучить вновь правило 1, вернуться на страницу 2 и выбрать правильный ответ.

На странице 5 подтверждается правильность выбранного ответа, дается вторая задача — вопрос и имеется два ответа, которые отсылают обучаемого к странице 7 или 4.

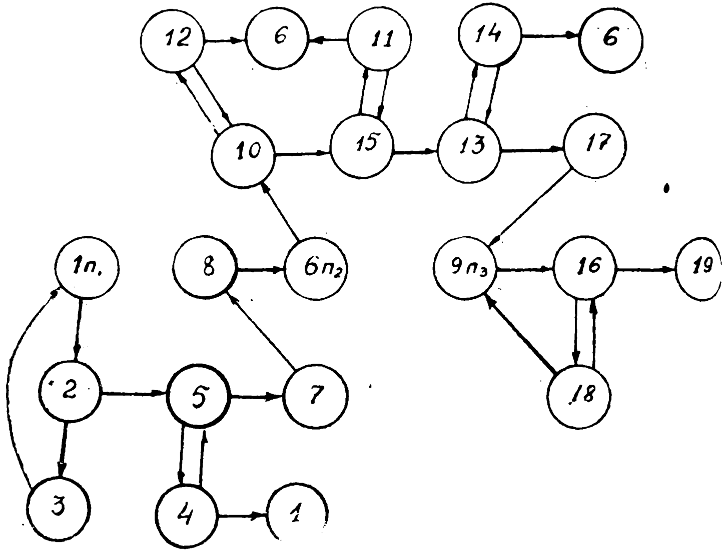


Рис. 7.

На странице 4 ответ неправильный. Обучаемый должен вновь посмотреть правило на странице 1 и вернуться к странице 5.

На странице 7 обучаемый видит подтверждение своего ответа и направляется к следующей порции на странице 8, откуда он переходит к изучению порции, расположенной на странице 6, т. е. к изучению правила 2. После этого обучаемый переходит к странице 10.

Неправильный выбор ответа приводит к странице 12, которая отсылает обучаемого посмотреть правило на

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	П	И	И							
2				И	П	И	И	И		
3									П	П

Рис. 8.

странице 6 и после этого вновь вернуться к странице 10 для выбора правильного ответа и т. д.

Таблица графа на рис. 7 построена по поточной диаграмме (рис. 8) и при условии разветвления на два ответа, из которых один верен.

Приложение. Ввиду небольшого объема статьи автор ограничивается рассмотрением примера применения матрицы для расположения правил в логически связной последовательности.

Для иллюстрации берутся элементарные сведения из теории приближенных вычислений и выделяются следующие правила:

1. Точное число.
2. Приближенное число.
3. Истинная погрешность приближенного числа.
4. Абсолютная погрешность числа.
5. Предельная абсолютная погрешность.
6. Относительная погрешность.
7. Предельная относительная погрешность.
8. Значащие цифры числа.
9. Верные цифры числа.
10. Округление.
11. Погрешность округления.
12. Зависимость между относительной погрешностью и числом верных цифр.

Этому расположению правил соответствует матрица (рис. 9).

Отношения между правилами в этой матрице легко усматриваются теми, кто знает этот раздел. Автор не может описать подробно выбор этих отношений.

На матрице (рис. 9) легко видеть, что между правилами вдоль определяющейся линии имеются разрывы (5 и 6, 7 и 8, 8 и 9, 11 и 12).

Изменим порядок расположения правил, поменяв местами правила 8 и 10, 9 и 11.

После этого расположение правил будет следующим:

1. Точное число.
2. Приближенное число.
3. Истинная погрешность приближенного числа.
4. Абсолютная погрешность.
5. Предельная абсолютная погрешность.

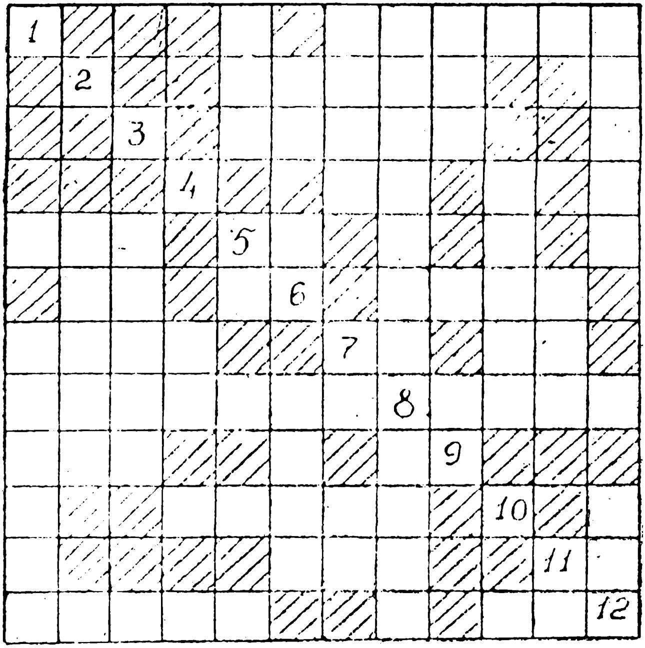


Рис. 9.

6. Относительная погрешность.
7. Предельная относительная погрешность.
8. Округление.
9. Погрешность округления.
10. Значащие цифры числа.
11. Верные цифры числа.
12. Зависимость между относительной погрешностью и числом верных цифр.

Этому расположению правил соответствует матрица (рис. 10). На этой матрице имеется разрыв между правилами 5 и 6, 7 и 8, 9 и 10, 10 и 11.

Поменяем местами правила 6 и 8, 7 и 9, 10 правило перенесем на 12 место.

Теперь правила расположатся следующим образом:

1. Точное число.
2. Приближенное число.

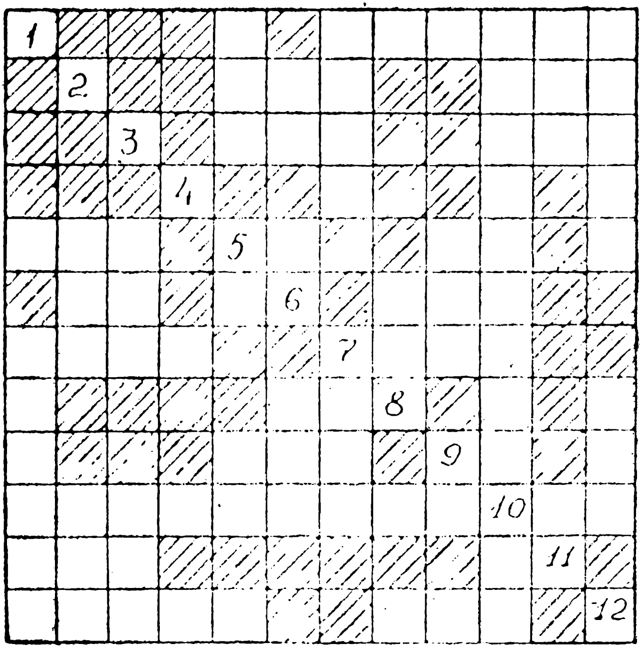


Рис. 10.

3. Истинная погрешность приближенного числа.
4. Абсолютная погрешность.
5. Предельная абсолютная погрешность.
6. Округление.
7. Погрешность округления.
8. Относительная погрешность.
9. Предельная относительная погрешность.
10. Верные цифры числа.
11. Зависимость между относительной погрешностью и числом верных цифр.
12. Значащие цифры числа.

Соответствующая матрица (рис. 11) имеет только один разрыв между правилами 7 и 8, причем все правила разбились на две связные области.

Таким образом, преобразование матрицы позволило очень удобно расположить материал, где каждая новая порция связана с предыдущей.

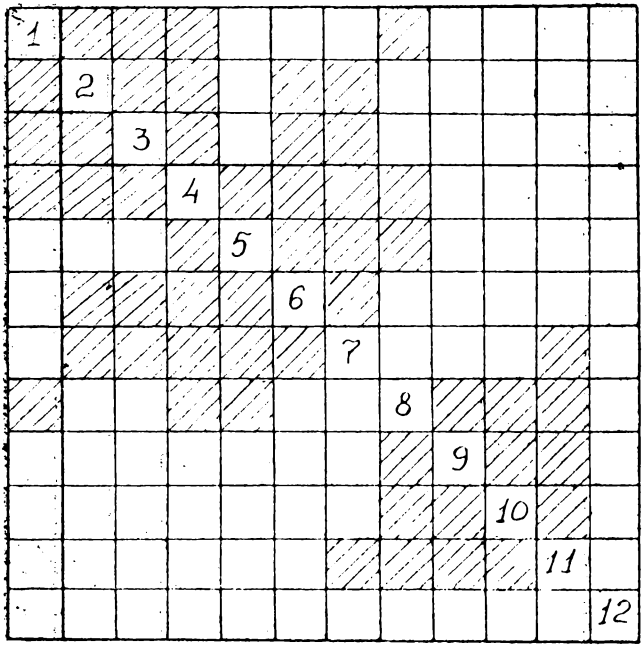


Рис. 11.

Заключение

Автор не считает, что положения, выдвинутые в статье, обязательны при составлении любой программы. В любом случае все зависит от конкретной темы и условий. Но тем не менее любой составитель программ найдет в ней материал, который поможет ему при составлении программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Томас К., Девис Д., Опеншоу Д., Берд Д. Перспективы программированного обучения. М., «Мир», 1966.

2. Столяров Л. М. Обучение с помощью машин. М., «Мир», 1965.

3. Моргунов Н. Б. Применение графов в разработке учебных планов и планирование учебного процесса. — «Советская педагогика» 1966, № 3.

Г. Г. БАШИРОВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЧЕТВЕРОК КОМПЛЕКСОВ, РАССЛОЯЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В настоящей статье определяются четверки комплексов в трехмерном проективном пространстве, расслояемые поверхностями, на основании определения расслояемой пары комплексов, данном в [1]. Для двух комплексов с взаимно однозначным соответствием лучей строятся два четырехпараметрических многообразия плоских элементов: центром элемента является точка на луче комплекса, а плоскость проходит через соответствующий луч второго комплекса. Такая пара комплексов была названа расслояемой, если: 1) каждое многообразие плоских элементов разбивается на ∞^2 семейств по ∞^2 элементов в семействе так, что геометрическое место центров семейства является поверхностью (расслояющей), огибаемой плоскостями семейства; 2) между расслояющими поверхностями двух комплексов существует взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие поверхности выделяют на комплексах одну и ту же пару конгруэнций; 3) каждая пара соответствующих расслояющих поверхностей является парой фокальных поверхностей конгруэнции W, образованной прямыми пересечения соответствующих касательных плоскостей. В [1] было доказано существование расслояемых пар комплексов, не разбивающихся на расслояемые пары конгруэнций.

К паре комплексов присоединим тетраэдр, совмещая ребра M_1M_2 и M_3M_4 с соответствующими лучами комплексов.

Если пара комплексов $\{M_1 M_2\}$ и $\{M_3 M_4\}$ является расслояемой и комплексы $\{M_1 M_3\}$ и $\{M_2 M_4\}$ тоже образуют расслояемую пару, то полученную конфигурацию назовем расслояемой четверкой комплексов.

Так как расслояемые пары конгруэнций являются парами T [2], и понятие соответствия T было обобщено М. А. Акивисом [3] на пары комплексов, то естественно искать расслояемые пары среди пар T комплексов.

Если каждая пара комплексов $\{M_1 M_2\}$, $\{M_3 M_4\}$ и $\{M_1 M_3\}$, $\{M_2 M_4\}$ является парой T, то имеем четверку T

комплексов [3], которую можно определить уравнениями

$$\omega_1^4 - \omega_2^3 = 0, \quad \omega_4^1 - \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 - \omega_1^4 = 0,$$

$$-[\varphi\omega_1^3] + [\chi\omega_1^4] + [\psi\omega_2^4] = 0,$$

$$[\varphi\,\omega_4^2] + [\chi\omega_4^1] - [\psi\omega_3^1] = 0,$$

$$[\varphi_1;\ \omega_4^2 + \omega_1^3] + 2\,[\chi_1\omega_1^4] - [\psi_1;\ \omega_3^1 + \omega_2^4] = 0,$$

где ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4 — главные линейно независимые формы,

$\varphi = \omega_2^1 + \omega_3^4$, $\quad \chi = \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4$, $\quad \psi = \omega_4^3 + \omega_1^2$,

$\varphi_1 = \omega_2^1 - \omega_3^4$, $\quad \chi_1 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4$, $\quad \psi_1 = \omega_4^3 - \omega_1^2$.

Пусть расслояемая пара комплексов $\{M_1 M_2\}$, $\{M_3 M_4\}$ является не особой парой T, то есть формы φ, χ, ψ на ней линейно независимы [3]. Тогда она определяется следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{array}{lr}
\omega_1^4 - \omega_2^3 = 0, & (a)\\
\omega_4^1 - \omega_3^2 = 0, & (b)\\
\omega_4^1 - \omega_1^4 = 0, & (c)\\
\varphi + a_1\omega_1^3 + a_2\omega_2^4 = 0, & (d)\\
\chi - a_4\omega_1^4 = 0, & (e)\\
\psi - a_2\omega_1^3 - a_3\omega_2^4 = 0, & (f)\\
l\,(\omega_3^1 - \omega_2^4) + a_4\varphi = 0, & (g)\\
l\,(\omega_4^2 - \omega_1^3) - a_4\psi = 0, & (h)\\
a_3\Delta a_1 + a_1\Delta a_3 - (2a_2 + a_4)\Delta a_2 - & \\
\quad - a_2\Delta a_4 - l\chi_1 = 0, & (i)
\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{lr}
[\varphi_1;\ \omega_4^2 + \omega_1^3] + 2\,[\chi_1\omega_1^4] - [\psi_1;\ \omega_3^1 + \omega_2^4] = 0, & (c')\\
[\Delta a_1\omega_1^3] + [\Omega_1\omega_1^4] + [\Delta a_2\omega_2^4] = 0, & (d')\\
[\Omega_1\omega_1^3] + [\Delta a_4\omega_1^4] + [\Omega_2\omega_2^4] = 0, & (e')\\
[\Delta a_2\omega_1^3] + [\Omega_2\omega_1^4] + [\Delta a_3\omega_2^4] = 0, & (f')
\end{array}\right\} \quad (1')$$

$$a_1[\Delta a_4\omega_1^3] - A[\varphi_1\omega_1^4] + [a_2\Delta a_4 + l\chi_1;\ \omega_2^4] = 0, \qquad (g')$$

$$[a_2\Delta a_4 + l\chi_1;\ \omega_1^3] + A[\psi_1\omega_1^4] + a_3[\Delta a_4\omega_2^4] = 0, \qquad (h')$$

где квадратичные уравнения получены внешним дифференцированием уравнений Пфаффа (1) и введены обозначения

$$l = a_1a_3 - a_2^2 - a_2a_4 = \mathrm{const} \neq 0, \qquad A = \frac{a_4^2 - 4l}{2},$$

$$\Delta a_1 = da_1 + a_1\left(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 - \frac{\chi}{2}\right),$$

$$\Delta a_2 = da_2 + a_2\frac{\chi_1}{2}, \qquad (2)$$

$$\Delta a_3 = da_3 + a_3\left(\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4 - \frac{\chi}{2}\right),$$

$$\Delta a_4 = da_4 + a_4\frac{\chi_1}{2},$$

$$\Omega_1 = \frac{2a_2 + a_4}{2}\psi - a_1\psi_1, \qquad \Omega_2 = a_3\varphi_1 - \frac{2a_2 + a_4}{2}\psi_1,$$

Система уравнений (1, (1′) в инволюции [4] и определяет расслояемую пару комплексов с произволом в шесть функций от одного аргумента.

Потребуем теперь, чтобы и вторая пара T комплексов $\{M_1M_3\}$, $\{M_2M_4\}$ была расслояемой парой.

Пусть точка $P = M_1 + \sigma M_3$ описывает расслоящую поверхность комплекса $\{M_1M_3\}$. Касательная плоскость к поверхности в точке P должна проходить через соответствующий луч M_2M_4 второго комплекса, то есть

$$(dPPM_2M_4) = 0.$$

Подставляя сюда

$$dP = (\omega_1^1 + \sigma\omega_3^1)P + (d\sigma + \sigma\omega_3^3 - \sigma\omega_1^1 - \sigma^2\omega_3^1 + \omega_1^3)M_3 + (\omega_1^2 + \sigma\omega_3^2)M_2 + (\omega_1^4 + \sigma\omega_3^4)M_4,$$

получаем

$$d\sigma + \sigma(\omega_3^3 - \omega_1^1) - \sigma^2\omega_3^1 + \omega_1^3 = 0. \qquad (3)$$

Если соответствующую расслояющую поверхность комплекса $\{M_2 M_4\}$ описывает точка $P' = M_2 + \sigma' M_4$, то касательная плоскость поверхности содержит соответствующий луч $M_1 M_3$ первого комплекса при условии

$$(\sigma P' P' M_1 M_3) = 0.$$

Подставляя

$$dP' = (\omega_2^2 + \sigma'\omega_4^2)\, P' + (d\sigma' + \sigma'\omega_4^4 - \sigma'\omega_2^2 - \sigma'^2\omega_4^2 + \\ + \omega_2^4)\, M_4 + (\omega_2^1 + \sigma'\omega_4^1)\, M_1 + (\omega_2^3 + \sigma'\omega_4^3)\, M_3,$$

получаем

$$d\sigma' + \sigma'(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \sigma'^2\omega_4^2 + \omega_2^4 = 0. \tag{4}$$

Вследствие третьего условия в определении расслояемой пары комплексов на поверхностях (P) и (P′) должны соответствовать асимптотические линии. Найдем уравнения асимптотических линий.

Если точка P описывает асимптотическую линию на поверхности (P), то соприкасающаяся плоскость линии, определяемая точками P, dP, d^2P, должна совпадать с касательной плоскостью PM_2M_4 к поверхности, что приводит в силу (3) к соотношению

$$(d^2P P M_2 M_4) = 0.$$

Подставим сюда

$$d^2P = \{ (\omega_1^2 + \sigma\omega_3^2)\,\omega_2^1 + (\omega_1^4 + \sigma\omega_3^4)\,\omega_4^1 \}\, M_1 + \\ + \{ (\omega_1^2 + \sigma\omega_3^2)\,\omega_2^3 + (\omega_1^4 + \sigma\omega_3^4)\,\omega_4^3 \}\, M_3 + \\ + \alpha P + \beta M_2 + \gamma M_4$$

(значения коэффициентов α, β, γ нас не интересуют). Принимая во внимание (1), получаем уравнение асимптотических линий на поверхности (P):

$$\sigma^2 (\omega_2^1 + \omega_3^4)\,\omega_1^4 + \sigma(\omega_1^2\omega_2^1 - \omega_3^4\omega_4^3) - \\ - (\omega_4^3 + \omega_1^2)\,\omega_1^4 = 0. \tag{5}$$

Аналогично найдем уравнение асимптотических линий на расслояющей поверхности (P′) второго комплекса

$$\sigma'^2 (\omega_4^3 + \omega_1^2)\,\omega_1^4 + \sigma'(\omega_1^2\omega_2^1 - \omega_3^4\omega_4^3) - \\ - (\omega_2^1 + \omega_3^4)\,\omega_1^4 = 0. \tag{6}$$

Асимптотические линии соответствуют, если уравнения (5) и (6) пропорциональны, что приводит к соотношению

$$\sigma\sigma' + 1 = 0, \tag{7}$$

определяющему взаимно однозначное соответствие между расслояющими поверхностями (P) и (P′).

Дифференцируя (7) и исключая $d\sigma$, $d\sigma'$ при помощи (3) и (4), получаем уравнение

$$\sigma^2(\omega_3{}^1 + \omega_2{}^4) + \sigma(\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2 - \omega_3{}^3 - \\ - \omega_4{}^4) - \omega_4{}^2 - \omega_1{}^3 = 0, \tag{8}$$

определяющее конгруэнцию, выделяемую на комплексе расслояющей поверхностью.

Двупараметрическое семейство расслояющих поверхностей для комплекса $\{M_1 M_3\}$ (и в силу (7) для комплекса $\{M_2 M_4\}$) определяется системой уравнений (3), (8) при условии полной интегрируемости ее.

Внешний дифференциал уравнения (8) тождественно равен нулю вследствие (8), (3,) и (1).

Дифференцируя внешним образом (3) и исключая $d\sigma$, получаем

$$\sigma^2[\omega_2{}^1 - \omega_3{}^4;\ \omega_1{}^4] + \sigma\{[\omega_3{}^4\omega_4{}^3] - [\omega_1{}^2\omega_2{}^1]\} - \\ - [\omega_4{}^3 - \omega_1{}^2;\ \omega_1{}^4] = 0. \tag{8′}$$

Соотношение (8′) должно удовлетворяться вследствие (8). Умножаем (8′) внешним образом на (8) и приравниваем нулю коэффициенты при степенях σ. Получим пять внешних дифференциальных уравнений, которые с помощью (1′) приводятся к эквивалентной системе

$$[\varphi_1\omega_1{}^4;\ \omega_3{}^1 + \omega_2{}^4] = 0, \qquad [\varphi_1\psi_1;\ \omega_3{}^1 + \omega_2{}^4] = 0,$$
$$2[\varphi_1\omega_1{}^4;\ \omega_4{}^2 + \omega_1{}^3] + [\varphi_1\psi_1 - \varphi\psi;\ \chi_1] + \\ + 2[\psi_1\omega_1{}^4;\ \omega_3{}^1 + \omega_2{}^4] = 0, \tag{9}$$
$$[\varphi_1\psi_1;\ \omega_4{}^2 + \omega_1{}^3] = 0, \qquad [\psi_1\omega_1{}^4;\ \omega_4{}^2 + \omega_1{}^3] = 0.$$

Расслояемая четверка комплексов определяется уравнениями (1), (1′), (2), (9). Эта система не в инво-

люции. Разрешаем (c′) системы (1′) по лемме Картана

$$\varphi_1 = b_1(\omega_4{}^2+\omega_1{}^3) + b_2\omega_1{}^4 + b_3(\omega_3{}^1 + \omega_2{}^4),$$
$$2\chi_1 = b_2(\omega_4{}^2 + \omega_1{}^3) + b_4\omega_1{}^4 + b_5(\omega_3{}^1 + \omega_2{}^4), \qquad (10)$$
$$-\psi_1 = b_3(\omega^{42}+\omega_1{}^3) + b_3\omega_1{}^4 + b_6(\omega_3{}^1+\omega_2{}^4).$$

Разложения (10) внесем в уравнения системы (9). Учитывая уравнения (1), получим следующие конечные соотношения

$$b_1 = 0, b_2b_3 = 0, b_3(8 + b_3b_4)\ (a_4{}^2 - 4l) -$$
$$-l^2b_4 = 0, b_5b_3 = 0, b_6 = 0.$$

Отсюда получаем два возможных случая

1) $b_1 = b_3 = b_4 = b_6 = 0.$

2) $b_1 = b_2 = b_5 = b_6 = 0,$

$b_3(8+b_3b_4)\ (a_4{}^2 - 4l) - l^2b_4 = 0.$

В первом случае

$$\varphi_1 = b_2\omega_1{}^4,\ 2\chi_1 = b_2(\omega_4{}^2 + \omega_1{}^3) + b_5(\omega_3{}^1 + \omega_2{}^4),$$
$$-\psi_1 = b_5\omega_1{}^4. \qquad (11)$$

Во втором случае

$$\psi_1 = b_3(\omega_3{}^1+\omega_2{}^4,\ 2\chi_1 = b_4\omega_1{}^4, -\psi_1 = b_3(\omega_4{}^2+\omega_1{}^3),$$
$$b_3(8+b_3b_4)\ (a_4{}^2 - 4l) - l^2b_4 = 0. \qquad (12)$$

Рассмотрим расслояемую четверку комплексов, определяемую уравнениями (1), (1′), (2), (11). Уравнения (1′) в силу (11) запишутся в виде

$$[\Delta a_1\omega_1{}^3] + [\Delta a_2\omega_2{}^4] = 0, \qquad (\widehat{d'})$$
$$[\Delta a_2\omega_1{}^3] + [\Delta a_3\omega_2{}^4] = 0, \qquad (\widehat{f'})$$
$$[da_4 + \frac{A}{2l}\ (b_2\psi - b_5\ \varphi);\ \omega_1{}^4] = 0, \qquad (\widehat{e'}) \qquad (\widehat{1'})$$
$$a_1[\Delta a_4\omega_1{}^3] + [a_2\Delta a_4 + l\chi_1;\ \omega_2{}^4] = 0. \qquad (\widehat{g'})$$
$$[a_2\Delta a_4 + l\chi_1;\ \omega_1{}^3] + a_3[\Delta a_4\omega_2{}^4] = 0 \qquad (\widehat{h'})$$

Присоединим к $(\widehat{1'})$ квадратичные уравнения, полученные внешним дифференцированием (11):

$$[\Delta b_2\omega_1{}^4] = 0, [\Delta b_2;\, \omega_4{}^2 + \omega_1{}^3] +$$

$$+ [\Delta b_5;\, \omega_3{}^1 + \omega_2{}^4] = 0, [\Delta b_5\omega_1{}^4] = 0, \qquad (11')$$

где $\Delta b_2 \doteq db_2 + b_2(\omega_1{}^1 - \omega_3{}^3) + \left(2 + \frac{l}{2}\right)(\omega_3{}^1 - \omega_2{}^4) -$

$$- \frac{b_2}{2}\,(b_2\omega_1{}^3 + b_5\omega_2{}^4),$$

$$\Delta b_5 = db_5 + b_5(\omega_2{}^2 - \omega_4{}^4) + \left(2 + \frac{l}{2}\right)(\omega_4{}^2 - \omega_1{}^3) -$$

$$- \frac{b_5}{2}\,(b_2\omega_1{}^3 + b_5\omega_2{}^4).$$

Система уравнений (1), (11), (2), $(\widetilde{1'})$, (11′) не в инволюции. Продолжаем ее. Разрешая $(\widetilde{e'})$, $(\widetilde{g'})$, $(\widetilde{h'})$ системы $(\widetilde{1'})$, получим

$$da_1 + \frac{A}{2l}\,(b_2\psi - b_5\varphi) = 0. \qquad (13)$$

Уравнения (11′) удовлетворяются при

$$\Delta b_2 = 0, \Delta b_5 = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (i) системы (1) вследствие (11) и (13) запишется в виде

$$a_3\widehat{\Delta a_1} + a_1\widehat{\Delta a_3} - (2a_2 + a_4)\widehat{\Delta a_2} = 0, \qquad (\widehat{i})$$

где
$$\widehat{\Delta a_1} = \Delta a_1 - \frac{a_1}{2}\,(3b_2\omega_1{}^3 - b_5\omega_2{}^4),$$

$$\widetilde{\Delta a_2} = \Delta a_2 + \frac{1}{2}\,(a_1 b_5\omega_1{}^3 + a_3 b_2\omega_2{}^4),$$

$$\widehat{\Delta a_3} = \Delta a_3 + \frac{a_3}{2}\,(b_2\omega_1{}^3 - 3b_5\omega_2{}^4).$$

Расслояемая четверка комплексов определяется теперь следующими уравнениями Пфаффа: (*a*) — (h) из

(1), $\widehat{(\mathrm{i})}$, (11), (13), (14) и конечным соотношением $l = a_1a_3 - a_2^2 - a_2a_4 = \mathrm{const} \neq 0$.

Внешнее дифференцирование их приводит только к двум квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned}(2a_2 + a_4)\,[\widetilde{\Delta a}_1\omega_1{}^3] + [a_3\widetilde{\Delta a}_1 + a_1\widehat{\Delta a}_3;\, \omega_2{}^4] &= 0,\\ [a_3\widetilde{\Delta a}_1 + a_1\widehat{\Delta a}_3;\, \omega_1{}^3] + (2a_2 + a_4)\,[\widehat{\Delta a}_3\omega_2{}^4] &= 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Остальные квадратичные уравнения удовлетворяются тождественно вследствие уравнений Пфаффа.

Характеристическая система форм содержит три формы $\omega_1{}^3$, $\omega_1{}^4$, $\omega_2{}^4$, независимые на искомом интегральном многообразии, формы, входящие в систему Пфаффа, и еще $q = 2$ формы $\widetilde{\Delta a}_1$, $\widehat{\Delta a}_3$ из (15). Так как имеем лишь два квадратичных уравнения, то характеры системы следующие: $s_1 = 2$, $s = 0$, $s_3 = 0$. Произвол цепи интегральных элементов $Q^2 = 2$. Произвол наиболее общего интегрального элемента $N = 2$. Система в инволюции и определяет расслояемую четверку комплексов с произволом в две функции от одного аргумента.

Рассмотрим второй случай. Присоединим к (1), (1′), (2) уравнения (12). Подставляя (12) в (e′), (g′), (h′) системы (1′), получаем

$$a_4 = \mathrm{const},\ b_3{}^2 = \frac{(4 + l)l}{a_4{}^2 - 4l}, \qquad b_4 = \frac{2(4\,l - a_4{}^2)}{l}\, b_3\,. \tag{16}$$

Коэффициенты b_3 и b_4 тоже имеют постоянные значения, так как $l = \mathrm{const}$.

Расслояемая четверка комплексов определяется системой Пфаффа (1), (12) и конечными соотношениями (16) и $l = \mathrm{const}$. Система ковариантов содержит только два независимых уравнения

$$\begin{aligned}(2a_2 + a_4)\,[\widetilde{\Delta a}_1\omega_1{}^3] + [a_3\widetilde{\Delta a}_1 + a_1\widehat{\Delta a}_3;\, \omega_2{}^4] &= 0,\\ [a_3\widetilde{\Delta a}_1 + a_1\widehat{\Delta a}_3;\, \omega_1{}^3] + (2a_2 + a_4)\,[\widehat{\Delta a}_3\omega_2{}^4] &= 0,\end{aligned} \tag{17}$$

где
$$\widetilde{\Delta a}_1 = \Delta a_1 - a_1 b_3\, \frac{4(l + a_2a_4) + a_4{}^2}{2l}\, \omega_1{}^4,$$

$$\widehat{\Delta a}_3 = \Delta a_3 - a_3 b_3\, \frac{4(l + a_2a_4) + {}^2a_4{}^2}{2l}\, \omega_1{}^4.$$

Система уравнений (1), (12), (16), (17) в инволюции и определяет расслояемую четверку комплексов, как и в первом случае, с произволом в две функции от одного аргумента.

В отличие от первого случая теперь формы ω_3^4, ω_2^1, ω_4^3, ω_1^2 являются линейными комбинациями только двух главных форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии.

Поэтому инфинитезимальные смещения лучей M_1M_4, M_2M_3 тетраэдра, определяемые дифференциалами

$$d(M_1M_4) = (\omega_1^1 + \omega_4^4)\ (M_1M_4) +$$

$$+\omega_1^2\ (M_2M_4) + \omega_1^3(M_3M_4) + \omega_4^2(M_1M_2) + \omega_4^3(M_1M_3),$$

$$d(M_2M_3) = (\omega_2^2 + \omega_3^3)\ (M_2M_3) +$$

$$+\omega_2^1(M_1M_3) + \omega_2^4(M_4M_3) + \omega_3^1(M_2M_1) + \omega_3^4(M_2M_4),$$

зависят только от двух параметров. Следовательно, комплексы, описываемые этими лучами, разлагаются на однопараметрические семейства конгруэнций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Баширова Г. Г. Расслояемые пары комплексов. Уч. зап. Ульяновского désинститута, 18, вып. 5, 1964.

[2] Фиников С. П. Теория пар конгруэнций, М., 1956.

[3] Акивис М. А. Пары Т комплексов. Матем. сб. 27, 351, 1950.

[4] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948.

И. И. КОВАЛЕВ

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ДЛЯ ТРИСЕКЦИИ УГЛА, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

1. Как известно, задачей о трисекции угла занимались еще в глубокой древности. В работах греческих геометров было доказано, что эта задача может быть решена при наличии начерченых кривых второго порядка.

В разное время предлагались также способы трисекции угла с любой степенью точности. Например, в [2] указан один из таких способов.

В данной статье рассматриваются не отдельные кривые второго порядка, применяемые для трисекции угла, а множество таких кривых. Затем некоторые свойства этих кривых, обусловленные их взаиморасположением, применяются для вывода приближенных формул. Один из предлагаемых способов приближенной трисекции угла, равного 3α, позволяет находить значение $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ с любой степенью точности. Другой способ может быть применен для нахождения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно значение $\operatorname{tg}3\alpha = k$.

Для дальнейшего необходимо напомнить некоторые выводы, известные из [3]. Лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ обладает следующим свойством: нормаль к лемнискате, проведенная через какую-либо ее точку образует с радиусом — вектором этой точки угол вдвое больший угла между радиусом — вектором точки, через которую проведена нормаль, и осью абсцисс. Таким образом, если к лемнискате провести нормаль, образующую с осью абсцисс данный угол 3α, подлежащий делению на три равные части, и найти точку пересечения нормали с лемнискатой, то задача о трисекции угла будет решена. Отобразим лемнискату и нормаль к ней, наклоненную под данным углом к оси абсцисс, при помощи преобразования инверсии относительно окружности радиуса a с центром в начале координат. Тогда лемниската преобразуется в гиперболу

$$x^2-y^2=a^2, \qquad (A)$$

а нормаль — в окружность, проходящую через начало координат и образующую с осью абсцисс угол, равный данному (то есть углу, образованному нормалью с осью абсцисс).

Так как, вследствие конформности преобразования инверсии, углы между кривыми до отображения равны углам между отображенными кривыми, то окружность, полученная в результате отображения нормали, и гипербола (A) в одной из точек пересечения должны быть ортогональны.

Поэтому задача о трисекции угла будет решена, если, взяв произвольную окружность, проходящую через

начало координат и образующую в начале координат с осью абсцисс данный угол 3α, мы сможем найти ортогональную ей гиперболу (A).

Гипербол (A) существует три, так как существуют три нормали к лемнискате Бернулли, образующих с осью абсцисс данный угол. Каждая из этих гипербол в одной из точек пересечения с окружностью ортогональна ей.

Вместо того, чтобы искать уравнения гипербол (A), заменим их уравнением новой гиперболы, на которой находятся все три искомые точки. Например, пусть требуется разделить угол $3\alpha = 60^0$. Возьмем уравнение окружности в виде $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$,

или $x^2+y^2-\sqrt{3}x+y=0$. (B)

Условие ортогональности окружности (B) и гиперболы (A) примет вид

$$x^2-y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{y}{2}=0. \qquad (C)$$

В каждой точке пересечения полученной гиперболы (C) и окружности (B) одна из трех гипербол (A) и окружность ортогональны. Поэтому, если провести прямые через начало координат и указанные точки пересечения, то эти прямые и образуют с осью абсцисс искомые углы.

В общем случае, если требуется разделить угол, тангенс которого равен K, то задача о трисекции угла сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{2k}{\sqrt{k^2+1}}x+y^2+\dfrac{2y}{\sqrt{k^2+1}}=0, \\ x^2-y^2-\dfrac{kx}{\sqrt{k^2+1}}-\dfrac{y}{\sqrt{k^2+1}}=0. \end{cases}$$

2. Пусть требуется разделить угол, тангенс которого равен K. Покажем, что эта задача может быть решена с помощью произвольной кривой второго порядка и некоторой окружности. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

$$y = -\frac{x}{k}.$$

Решив эту систему, получим

$$x_1 = -\frac{rk}{\sqrt{k^2+1}}, \quad y_1 = \frac{r}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Мы взяли только одно решение системы, а именно — координаты той точки, в которой касательная к окружности имеет данный угол, определенный равенством $tg 3\alpha = k$.

Найдем уравнение гиперболы с действительной осью, параллельной оси абсцисс, приняв за центр гиперболы точку с координатами (x_1, y_1).

Уравнение этой гиперболы имеет вид

$$\left(x + \frac{rk}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 - \left(y - \frac{r}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 = a^2. \tag{2}$$

Условие ортогональности окружности (1) и гиперболы

(2) запишется в форме

$$x^2 - y^2 + \frac{rk}{\sqrt{k^2+1}}x + \frac{r}{\sqrt{k^2+1}}y = 0. \tag{3}$$

Система уравнений (1) и (3) и определит искомые точки. Умножим теперь обе части уравнения (1) на некоторое число s и полученное уравнение сложим почленно с уравнением (3).

Получим

$$(1+s)x^2 - (1-s)y^2 + \frac{rk}{\sqrt{1+k^2}}x + \frac{r}{\sqrt{1+k^2}}y - r^2s = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что если некоторая точка (x, y) является точкой пересечения кривых (1) и (3), то эта точка будет

служить и точкой пересечения кривых (1) и (4). Кривые (4) представляют из себя множество кривых второго порядка, проходящих через искомые точки. Найдем теперь уравнение кривой, на которой находятся центры кривых (4). Эту кривую, для краткости, назовем кривой центров. Из уравнения (4) определим координаты центров:

$$x = -\frac{rk}{2(s+1)\sqrt{k^2+1}}, \quad y = -\frac{r}{2(s-1)\sqrt{k^2+1}}. \tag{5}$$

Уравнения (5) можно рассматривать как параметрические уравнения кривой центров. Исключим из этих уравнений параметр s.

Тогда получим $y = \dfrac{rx}{kr + 4\sqrt{k^2+1}x}$.

Это уравнение и является уравнением кривой центров. Можно показать, что если центры кривых (4) брать на левой ветви кривой центров, то эти кривые будут гиперболами, если же взять кривую, у которой центр расположен на правой ветви кривой центров, то эта кривая будет эллипсом. При $s = \pm 1$ из уравнения (4) получим уравнения двух парабол. Среди кривых (4) находятся и три пары пересекающихся кривых. Приравнивая определитель, составленный из всех коэффициентов уравнения, нулю, получим

$$\begin{vmatrix} 1+s & 0 & \dfrac{rk}{2\sqrt{k^2+1}} \\ 0 & s-1 & \dfrac{r}{2\sqrt{k^2+1}} \\ \dfrac{rk}{2\sqrt{k^2+1}} & \dfrac{r}{2\sqrt{k^2+1}} & -r^2 s \end{vmatrix} = s^3 + \frac{3}{4}s + \frac{1-k^2}{r(1+k^2)} = 0.$$

Это уравнение имеет три действительных корня. Если значение каждого из корней полученного уравнения подставить в уравнение (4), то оно распадется на пару пересекающихся прямых, так как определитель $\delta = s^2 - 1$ при этом будет меньше нуля.

Таким образом, среди кривых (4) находятся все виды кривых второго порядка.

Рассмотрим в качестве примера случай деления угла в 60°. Полагая в уравнении (4) $к = \sqrt{3}$ и $r = 1$, получим уравнение связки кривых

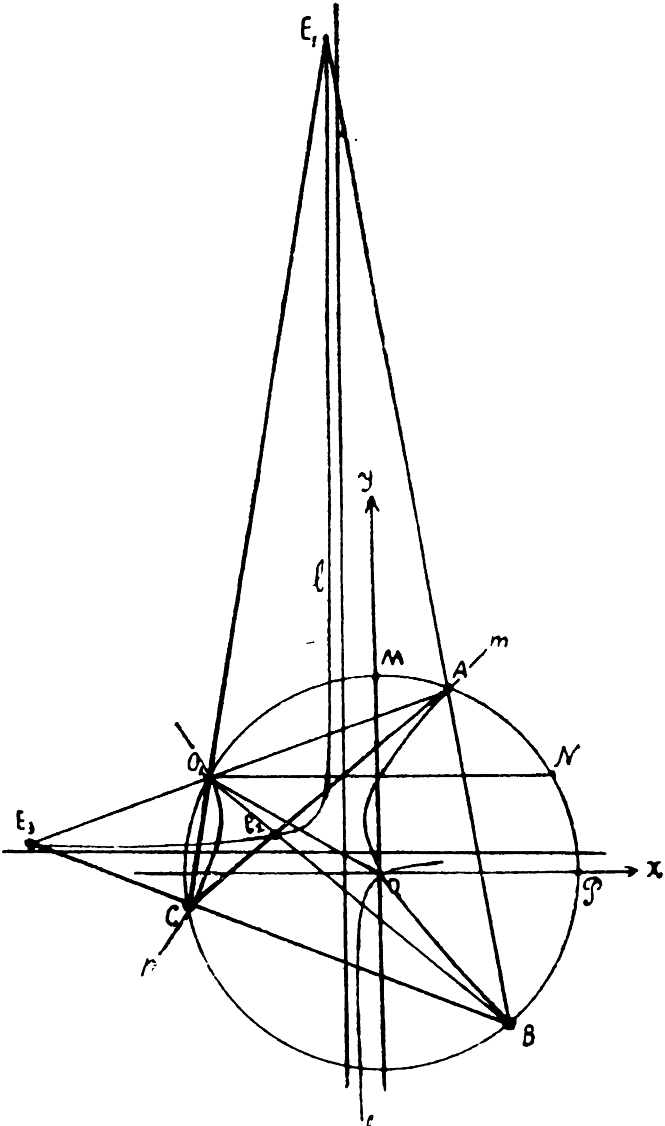
$$(s+1)x^2 + (s-1)y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - s = 0. \qquad (4^*)$$

Уравнение кривой центров примет вид $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}+8x}$.

На чертеже (1) кривая l является графиком кривой центров, а кривая m — графиком одной из кривых семейства (4), полученной при $к = \sqrt{3}$, $r = 1$.

Назовем теперь для краткости точки пересечения пар прямых O_1C и AB, O_1B и AC, AO_1 и BC узловыми точками (на чертеже 1 — точки E_1, E_2, E_3). Можно показать, что в окрестности узловых точек кривые из класса кривых (4) меняют направление действительной оси на взаимно-перпендикулярное. Так, например, если взять точку на кривой центров между точками E_1 и E_2 (чертеж 1), то действительная ось соответствующей гиперболы будет параллельна оси абсцисс, если же центр кривой брать выше точки E_1, то действительная полуось соответствующей гиперболы будет параллельна оси ординат. Аналогичным образом ведут себя гиперболы и в окрестности других узловых точек. Направление большой оси эллипсов из семейства кривых (4) также меняется при переходе через начало координат. Так, если на правой ветви кривой центров брать точки левее начала координат, то у соответствующих эллипсов из семейства кривых (4) большая ось будет параллельна оси ординат. Если же центры кривых брать на кривой центров правее начала координат, то большие оси соответствующих эллипсов будут параллельны оси абсцисс.

3. Поставим вопрос — можно ли указанным способом производить трисекцию угла при помощи произвольной кривой второго порядка? Рассмотрим снова кривые



Черт. 1.

(4). Найдем из этого уравнения полуоси кривых. После несложных преобразований получим

$$a^2 = \frac{r^2 s}{s+1} + \frac{r^2 k^2}{4(1+k^2)(1+s)^2} - \frac{r^2}{4(1-s^2)(1+k^2)},$$

$$b^2 = \frac{r^2 s}{1-s} + \frac{r^2 k^2}{4(1+k^2)(1-s)^2} - \frac{r^2}{4(1+k^2)(1-s)^2}, \qquad (6)$$

где a и b — полуоси кривых.

Исключая из системы уравнений (6) параметр r получим $s = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$.

Подставляя найденное значение s в (6), найдем и r. Аналогично среди кривых (4) можно найти заданный эллипс или параболу. Отсюда вытекает, что наличие графика любой кривой второго порядка с произвольными полуосями позволяет делить любой угол на три равные части.

4. Из уравнений (4) видно, что оси симметрии этих кривых параллельны осям координат. Однако пока неясно, можно ли применить для трисекции угла кривые второго порядка, имеющие другой угол наклона осей симметрии к осям координат? Можно показать, что такие кривые существуют и что рассмотренный выше класс кривых (4) есть лишь один из бесчисленного множества классов кривых второго порядка. При этом каждый класс включает в себя также бесконечное множество кривых второго порядка и имеет свою кривую центров. Однако для решения вопроса необходимо предварительно провести дополнительные рассуждения. Поставим перед собой такую задачу: дана кривая $y = f(x)$. Пусть $\frac{y}{x} = \beta(x)$ тангенс угла наклона радиуса — вектора

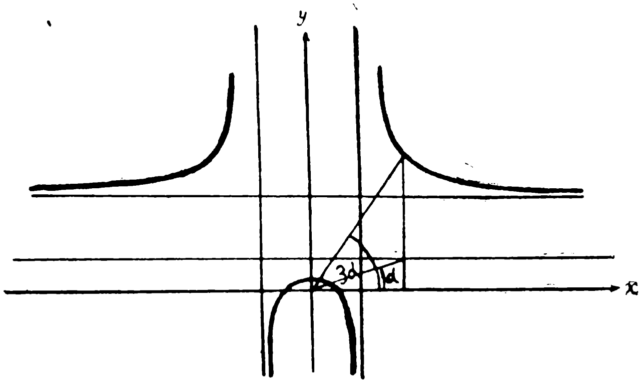
произвольной точки этой кривой к оси абсцисс, абсцисса которой равна x. Найти кривую $y = \varphi(x)$, для которой при том же значении x $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 3\beta(x)$. Используя

формулу для $\operatorname{tg} 3\alpha$, нетрудно показать, что уравнение этой кривой будет иметь вид

$$y = \frac{y(3x^2 - y^2)}{x^2 - 3y^2}. \qquad (7)$$

В дальнейшем для краткости будем называть кривую, определенную уравнением $y = f(x)$ — базисной кривой, а кривую (7) — кривой тройных углов.

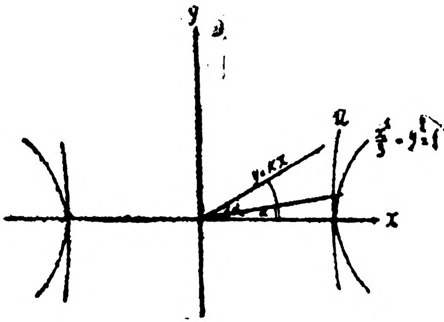
Если в качестве базисной кривой взять наиболее простую линию $y = 1$, то кривой тройных углов будет кривая, определенная уравнением $y = \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 3}$ (черт. 2).



Черт. 2.

Геометрически ясно, что если базисные кривые брать в остром угле между прямыми $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, то кривые тройных углов будут состоять не из трех ветвей, а только из двух. Так, например, если в качестве базисной кривой взять гиперболу $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, то уравнением кривой и тройных углов будет уравнение $y = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}x^2 + 1\right)\sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}$. (черт. 3).

Возвращаясь к задаче трисекции угла в 60°, определим величину угла $\angle AOP$ (черт. 1). Так как $\angle AO_1N = 20°$, то $\smile MN = 60°$, а поэтому $\smile MA = 20°$.



Черт. 3.

Вследствие этого $\angle AOP = 70°$. Умножим обе части уравнения (4) при $r = 1$, $к = \sqrt{3}$ на 2 и сначала сложим почленно с уравнением (I), а потом вычтем из первого второе.

Тогда получим $\quad 3x^2 - y^2 + \sqrt{3}x + y - 1 = 0$

$$x^2 - 3y^2 + \sqrt{3}x + y + 1 = 0.$$

Отсюда найдем $\quad \dfrac{3x^2 - y^2}{x^2 - 3y^2} = \dfrac{\sqrt{3}x + y - 1}{\sqrt{3}x + y + 1}$.

Умножая обе части на y, получим

$$\frac{y(3x^2 - y^2)}{x^2 - 3y^2} = \frac{y(\sqrt{3}x + y - 1)}{\sqrt{3}x + y + 1}. \tag{8}$$

Так как через точки A, B, C проходит кривая (7), то, очевидно, что кривая (8) также проходит через эти точки. Будем рассматривать точку A как точку пересечения базисных кривых $y = \operatorname{tg} 70° x$ и (8). Тогда, так как $\angle AOP = 70°$, то ордината y соответствующей кривой тройных углов будет видна из начала координат под углом в 210°, то есть под острым углом в 30°. Вследствие этого, надо искать пересечение кривой тройных углов с прямой $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Но из уравнения (8) очевидно, что

вместо уравнения $\frac{y(3x^2-y^2)}{x^2-3y^2}=\frac{x}{\sqrt{3}}$ можно взять уравнение

$$\frac{y(\sqrt{3}x+y-1)}{\sqrt{3}x+y+1}=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда получим

$$\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}y^2-2xy+x+\sqrt{3}y=0. \qquad (9)$$

Не следует забывать, что здесь x, y — координаты точек базисной кривой. Таким образом, мы получили уравнение новой кривой второго порядка, в котором присутствует член с xy. Вследствие этого у данной кривой оси симметрии не будут параллельны осям координат. Кривая (9) является равносторонней гиперболой с центром в точке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Действительная ось этой кривой наклонена к оси абсцисс под углом в 75°. Все кривые (4*+) проходили через точку $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Кривая же (9) не проходит через эту точку: Вместо этого она проходит через точку единичной окружности с координатами (0,1). Кривая (9) совместно с уравнением окружности является родоначальником нового класса кривых. Действительно, как и ранее, из этих уравнений получим

$$(\sqrt{3}+s)x^2+(s-\sqrt{3})y^2-2xy+x+\sqrt{3}y-s=0 \qquad (10)$$

Угол наклона действительной оси кривой (10) к оси абсцисс определяется равенством $\operatorname{tg}\alpha=2+\sqrt{3}$ и, следовательно, он равен 75°. Найдем уравнение кривой центров. Решив систему уравнений

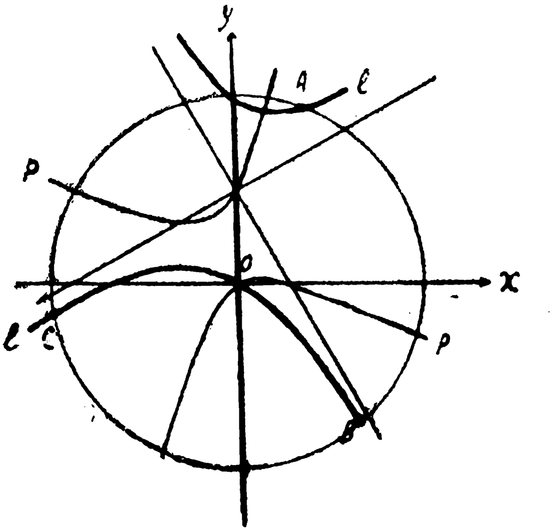
$$\begin{cases} (\sqrt{3}+s)x-y+\frac{1}{2}=0 \\ -x+(s-\sqrt{3})y+\frac{\sqrt{3}}{2}=0, \end{cases}$$

получим уравнение кривой центров в параметрическом виде

$$x=\frac{s}{2(4-s^2)}, \qquad y=\frac{\sqrt{3}s+4}{2(4-s^2)},$$

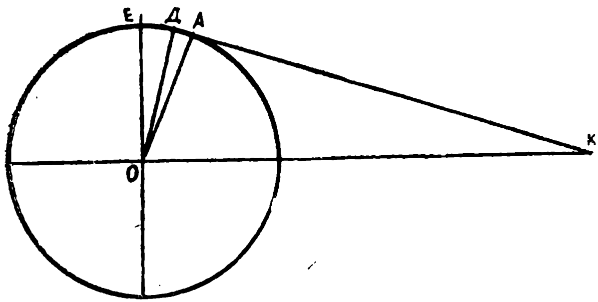
или: $2x^2-2y^2+4\sqrt{3}xy-\sqrt{3}x+y=0$. Центр этой кривой находится в точке $\left(0,\frac{1}{4}\right)$. Наклон действительной оси к оси абсцисс определяется равенством $tg\alpha=-\sqrt{3}$. Это также равносторонняя гипербола. Ее асимптоты параллельны осям симметрии кривых (10). Аналогичным свойством обладают и кривые класса (4). Уравнение этой кривой центров по отношению к осям симметрии имеет вид $4x^2-4y^2=\frac{1}{8}$. (На чертеже 4 изображены гипербола родоначальник класса l и кривая центров P).

4. Покажем теперь, что классов кривых второго порядка, с помощью которых можно производить трисек-



Черт. 4.

цию угла, существует бесчисленное множество. При этом кривые каждого класса, кроме точек А, В, С, проходят еще через определенную точку окружности. Иначе говоря, задание произвольной точки на окружности, через которую должны проходить кривые того или иного класса, вполне определяет этот класс кривых, причем кривые каждого из этих классов имеют свой наклон осей симметрии к оси абсцисс и свою кривую центров. Для этого возьмем на окружности произвольную точку Д (черт. 5). Выразим угол $\angle$ АКО через абсциссу точки Д,



Черт. 5.

которую обозначим a. Так как мы рассматриваем по-прежнему случай деления угла в 60° на три равные части, то $\angle EOA = 20°$ (см. чертеж 1). Поэтому $\angle$ДОА равен $20° - \alpha$ и, следовательно, $\angle ДАО = 80° + \frac{\alpha}{2}$, а тогда из $\triangle AOK$ найдем $\angle AKO = 10° + \frac{\alpha}{2}$. Вследствие этого, если точку D принять за начало координат, то точка кривой тройных углов, соответствующая точке А, будет находиться на прямой $y = -\mathrm{tg}\left(30° + \frac{3}{2}\alpha\right)x$. Выразим теперь угловой коэффициент этой прямой через абсциссу a точки D в старой системе. Так как $\sin\alpha = a$ и $\cos\alpha = \sqrt{1 - a^2}$, то $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$.

Отсюда $$\operatorname{tg}\frac{3}{2}\alpha=\frac{2a^2-1+\sqrt{1-a^2}}{a\left(2\sqrt{1-a^2}-1\right)},$$

Тогда $$\operatorname{tg}\left(30^\circ+\frac{3}{2}\alpha\right)=$$

$$=\frac{(2a+\sqrt{3})\sqrt{1-a^2}-a-\sqrt{3}+2a^2\sqrt{3}}{(2a\sqrt{3}-1)\sqrt{1-a^2}-2a^2-a\sqrt{3}+1}.$$

Вследствие этого уравнение вышеуказанной прямой, на которой находится точка кривой тройных углов, соответствующая точке A (точке базисной кривой), примет вид

$$y=-\frac{(2a+\sqrt{3})\sqrt{1-a^2}-a-\sqrt{3}+2a^2\sqrt{3}}{(2a\sqrt{3}-1)\sqrt{1-a^2}-2a^2-a\sqrt{3}+1}\,x. \tag{11}$$

Перенесем теперь начало координат в точку D и запишем в этой системе координат уравнение гиперболы (3) ($k=\sqrt{3}$, $r=1$), проходящей через точки A, B, C (черт. 1), и уравнение окружности. Эти уравнения примут вид

$$x^2-y^2+\left(2a+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{1-a^2}\right)y+2a^2-1+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}=0,$$
$$x^2+y^2+2ax+2\sqrt{1-a^2}\,y=0.$$

Умножим первое уравнение на 2 и сначала сложим со вторым, а потом вычтем из первого второе. Тогда получим

$$3x^2-y^2+(6a+\sqrt{3})\,x+\left(1-2\sqrt{1-a^2}\right)y+$$
$$+4a^2-2+\sqrt{3}a+\sqrt{1-a^2}=0,$$
$$x^2-3y^2+(2a+\sqrt{3})\,x+\left(1-6\sqrt{1-a^2}\right)y+$$
$$+4a^2-2+\sqrt{3}a+\sqrt{1-a^2}=0.$$

Находя отсюда отношение $y\frac{(3x^2-y^2)}{x^2-3y^2}$ и приравнивая правую часть равенства выражению (11), то есть поступая так же, как и при нахождении кривой (9), получим

$$\frac{y\left[(6a+\sqrt{3})x+\left(1-2\sqrt{1-a^2}\right)y+4a^2+\sqrt{3}a-2+\sqrt{1-a^2}\right]}{(2a+\sqrt{3})x+\left(1-6\sqrt{1-a^2}\right)y+4a^2+\sqrt{3}a-2+\sqrt{1-a^2}}=$$

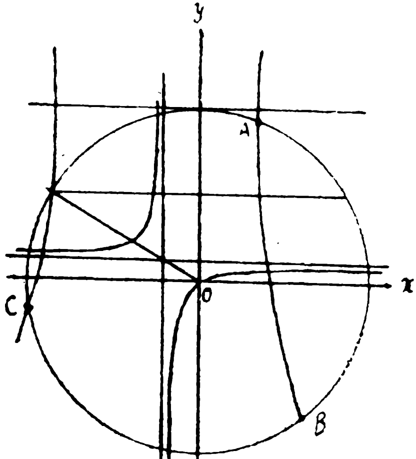
$$=\frac{(2a+\sqrt{3})\sqrt{1-a^2}-a-\sqrt{3}+2a^2\sqrt{3}}{(2a\sqrt{3}-1)\sqrt{1-a^2}-2a^2-a\sqrt{3}+1}. \qquad (12)$$

Эта кривая и является родоначальником класса кривых, проходящих через точку $D(a,\sqrt{1-a^2})$. В уравнении этой кривой x и y являются координатами точек кривой в системе координат с началом в точке D и с осями, параллельными осям данной системы координат. Давая a различные значения, мы будем получать различные кривые, каждая из которых будет служить родоначальником некоторого класса кривых. Заменяя в уравнении (12) x на $x-a$ и y на $y-\sqrt{1-a^2}$, мы получим уравнение (12) в первоначальной системе координат. Если после этого уравнение окружности умножить на s и сложить с полученным после переноса начала координат уравнением, то будет получено уравнение того или иного класса кривых в зависимости от числа a, то есть от положения точки D на окружности. В частности, если подставить значение $a=0$ и сделать указанный перенос, то из уравнения (12) мы получим уравнение (9), найденное ранее. Можно показать, что в каждом из классов кривых второго порядка будут находиться кривые всех видов. Точно также показывается, что любая кривая второго порядка будет находиться в каждом классе, так как, поступая как и прежде, можно подобрать соответствующую окружность и число s. При этом действия полностью совпадут с указанными ранее, если предварительно сделать поворот осей на такой угол, чтобы новые оси координат стали параллельны асимптотам кривой центров. Заметим, что если точку D перемещать по окружности до совпадения с точкой A, то соответствующая гипербо-

ла (родоначальник класса), деформируясь, превратится в пару параллельных прямых, одна из которых будет касаться окружности в точке A, а другая пройдет через точки B и C.

Из вышеизложенного вытекает следующий вывод: **Любую кривую второго порядка можно расположить по отношению к некоторой окружности бесчисленным множеством способов (по числу классов) таким образом, что точки пересечения ее с окружностью будут определять искомые углы.**

5. Перейдем теперь к выводу приближенных формул, позволяющих производить трисекцию угла с любой степенью точности. При этом во избежание громоздких записей рассуждения проведем для случая деления угла в 60°. Для этого вернемся опять к классу кривых (4). Исследуя расположение кривых этого класса, нельзя не заметить, что если ордината центра кривой близка по своему значению к ординате точки A (черт. 6), то абс-



Черт. 6.

цисса правой вершины гиперболы, ввиду малой вогнутости ее вблизи вершины, будет очень мало отличаться от абсциссы точки A. Поэтому абсциссу правой вершины такой гиперболы можно приближенно считать равной

$\sin 20°$ (ибо радиус окружности равен единице). Ордината же центра такой гиперболы служит приближенным значением $\cos 20°$. Запишем уравнение (4) в следующем виде

$$(s+1)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{4(s+1)}\right)^2+(s-1)\left(y+\frac{1}{4(s-1)}\right)^2=$$

$$=\frac{3}{16(s+1)}+\frac{1}{16(s-1)}+s, \quad (k=\sqrt{3},\ r=1).$$

Приравняем теперь ординату центра этой кривой некоторому числу q_1. Тогда получим

$$-\frac{1}{4(s-1)}=q_1, \quad s=\frac{4q_1-1}{4q_1}, \quad s+1=\frac{8q_1-1}{4q_1},$$

и уравнение кривой примет вид

$$\frac{8q_1-1}{4q_1}\left(x+\frac{\sqrt{3}\,q_1}{8q_1-1}\right)^2-\frac{1}{4q_1}(y-q_1)^2=$$

$$=\frac{3q_1}{4(8q_1-1)}-\frac{q_1}{4}+\frac{4q_1-1}{4q_1}.$$

Найдем длину действительной полуоси:

$$a=\sqrt{\left(\frac{3q_1}{8q_1-1}-q_1+\frac{4q_1-1}{q_1}\right)\frac{q_1}{8q_1-1}}.$$

Вычитая из найденного значения a расстояние от центра гиперболы до оси ординат, получим абсциссу p_1 правой вершины гиперболы:

$$p_1=\sqrt{\left(\frac{3q_1}{8q_1-1}-q_1+\frac{4q_1-1}{q_1}\right)\frac{q_1}{8q_1-1}}-\frac{\sqrt{3}\,q_1}{8q_1-1}. \tag{13}$$

Если значения q_1 брать достаточно близко к $\cos 20°$, то значения p_1 автоматически и весьма значительно повышают точность, то есть значения $\sin 20°$ будут намного более точными, чем взятые с грубым приближением значения $\cos 20°$. Если, пользуясь найденным по формуле значением p_1, найти соответствующее $q_2=\sqrt{1-p_1^2}$ и

подставить его в формулу (13), то найденное по формуле значение p_2 будет значительно точнее значения p_1. В результате последовательного применения указанных операций мы получим две последовательности чисел:

$$q_1, q_2 \ldots, q_n, \ldots$$

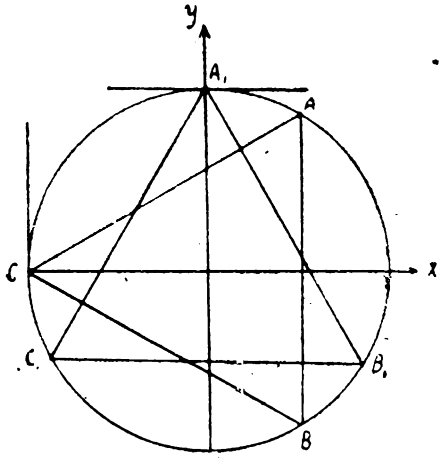
$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

Каждый член первой из этих последовательностей будет являться приближенным значением $\cos 20°$, а каждый член второй последовательности — приближенным значением $\sin 20°$. Если у нас нет никаких предположений относительно приближенного значения $\cos 20°$, то процесс можно начинать с числа $q_1 = 1$. Тогда $p_1 = \sqrt{\left(2+\frac{3}{17}\right)\frac{1}{7}} - \frac{\sqrt{3}}{7} = 0{,}3415$ (табличное значение 0.3420). Если теперь найти значение $q_2 = \sqrt{1-0{,}3415^2}$ и подставить в формулу (13) вместо q_1, то мы получим приблеженное значение $\sin 20°$, верное с семью десятичными знаками, то есть, если $q_2 = 0{,}94$, то $p_2 = 0{,}34202013$. Табличное значение 0,34202015. Следует иметь в виду, что чем ближе угол, подлежащий делению, к 90°, тем большую точность уже в результате первого цикла вычислений мы получим. Это объясняется тем, что с увеличением угла, который требуется разделить, прямая АВ (черт. 6) треугольника АВС занимает все более вертикальное положение, а ветви соответствующей гиперболы все больше напоминают параллельные прямые. Вследствие этого отклонение абсциссы правой вершины гиперболы от абсциссы точки А делается все меньше и меньше. При делении же угла в 90° на три равные части гипербола распадается на пару параллельных прямых и прямая АВ (черт. 7) занимает вертикальное положение.

Для оценки погрешности формулы (13) отнесем уравнение гиперболы к правой вершине и найдем из него x, как функцию от y.

Получим

$$\frac{8q_1-1}{4q_1}\left[x+\sqrt{\left(\frac{3q_1}{8q_1-1}-q_1+\frac{4q_1-1}{q_1}\right)\frac{q_1}{8q_1-1}}\right]^2-$$



Черт. 7.

$$-\frac{y^2}{4q_1} = \frac{3q_1}{4(8q_1-1)} - \frac{q_1}{4} + \frac{4q_1-1}{4q_1}.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{y^2}{8q_1-1} + \frac{3q_1^2}{(8q_1-1)^2} - \frac{q_1^2}{8q_1-1} + \frac{4q_1-1}{8q_1-1}} - \sqrt{\frac{3q_1^2}{(8q_1-1)^2} - \frac{q_1^2}{8q_1-1} + \frac{4q_1-1}{8q_1-1}},$$

или

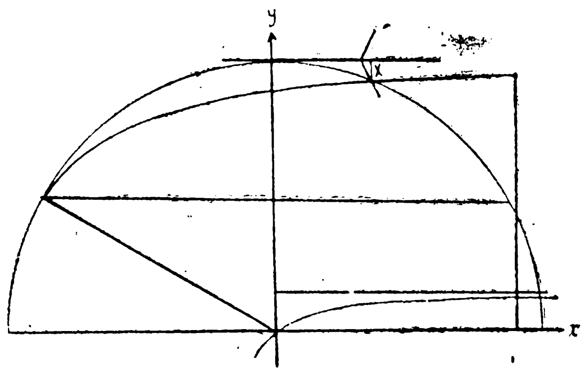
$$x = \frac{y^2}{(8q_1-1)\left[\sqrt{\frac{y^2}{8q_1-1} + \frac{3q_1^2}{(8q_1-1)^2} - \frac{q_1^2}{8q_1-1} + \frac{4q_1-1}{8q_1-1}} + \sqrt{\frac{3q_1^2}{(8q_1-1)^2} - \frac{q_1^2}{8q_1-1} + \frac{4q_1-1}{8q_1-1}}\right]},$$

то есть

$$x < \frac{y^2}{2\sqrt{3q_1^2 - q_1^2(8q_1-1) + (4q_1-1)(8q_1-1)}} =$$

$$=\frac{y^2}{2\sqrt{36q_1^2-8q_1^3-12q_1+1}}.$$

Здесь под y нужно понимать отклонение $q_1\approx\cos 20^\circ$ от истиного значения, а под x — величину ошибки, полученной при вычислении p_1. На чертеже 8 в утрированной форме, так как, фактически, ветвь гиперболы идет почти вертикально в достаточно малой окрестности ее вершины, изображены отрезки, длины которых равны x и y. Если величина y неизвестна, то ее можно найти с достаточной точностью. Для этого вместо гиперболы следует взять эллипс с вершиной, расположенной правее точки А (черт. 8). Если, например, взять эллипс, у которого абс-



Черт. 8.

циссa центра равна $\frac{1}{2}$, то его верхняя вершина при делении всех углов будет расположена правее искомой точки А (черт. 8). В этом случае разность между q_1 и ординатой этого эллипса в точке с абсциссой p_1 и будет определять величину y с некоторым избытком. Величина y будет тем точнее, чем ближе абсцисса верхней вершины эллипса к абсциссе точки А. Однако уточнение величины y означает снова приближенную трисекцию угла, но уже при помощи эллипса.

Если исходить из кривых (4) при $r=1$, то аналогичными рассуждениями можно получить приближенную формулу для деления любого угла.

Она имеет вид $p_1 =$

$$=\sqrt{\left(\frac{k^2 q_1}{4q_1\sqrt{k^2+1}-1}-q_1+\frac{2q_1\sqrt{k^2+1}-1}{q_1}\right)\frac{q_1}{4q_1\sqrt{k^2+1}-1}} -$$

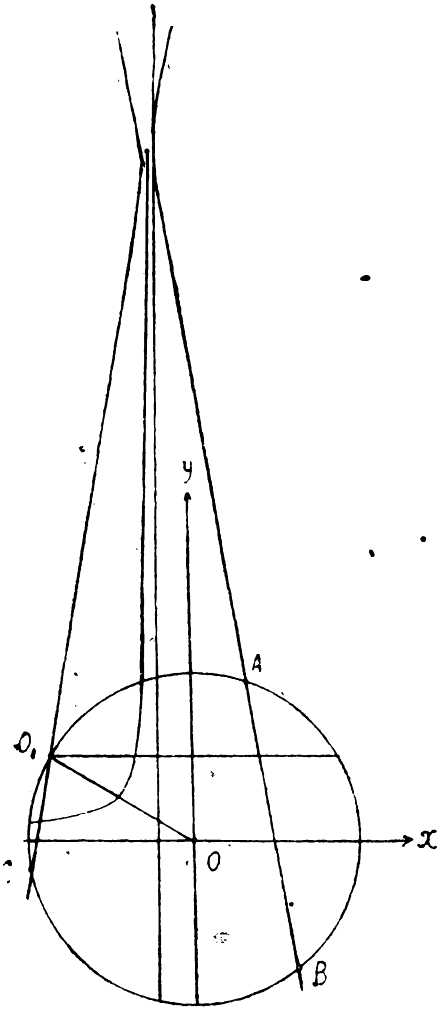
$$-\frac{kq_1}{4q_1\sqrt{k^2+1}-1}. \qquad (14)$$

Здесь k — угловой коэффициент уравнения одной из сторон угла, если другая сторона принята за ось абсцисс и начало координат находится в точке пересечения его сторон.

При $k = \sqrt{3}$, что соответствует делению угла в 60°, формула (14) дает выражение (13).

Полученная формула уже с первого шага дает высокую точность. Заметим, что эта формула так же, как и формула (13), является почти рекуррентной, так как вычисленные по ней значения слегка видоизменяются по формуле $q_2 = \sqrt{1-p_1^2}$ и затем снова подставляются в нее же. Кроме приближенной трисекции угла, полученной формулой можно пользоваться для улучшения табличных значений. Так, например, если для каких-нибудь целей потребовалось знать значение sin20° с точностью до четырнадцати знаков, а в нашем распоряжении семизначная таблица, то беря из таблицы значение sin20° с точностью до семи знаков, после одного цикла действий по формуле (13), мы получим значение sin20° с точностью до четырнадцати знаков.

Другим источником приближенных формул является замена точки пересечения гиперболы и окружности точкой пересечения асимптоты гиперболы и окружности, при условии, что выбранная гипербола имеет очень малую полуось и достаточно удаленный от окружности центр. Очевидно, что и направление асимптот такой гиперболы будет почти совпадать с направлением одной из сторон треугольника ABC. Стороны же треугольника ABC в случае деления, например, угла в 60° образуют острые углы с осью OX соответственно равные 20°, 60°, 80°, то есть углы, которые и отыскиваются нами. Таким образом, если удастся выбрать гиперболу с очень малой действительной осью и с удаленным от окружности центром, то такая гипербола почти сольется с соответствую-



Черт. 9.

щей асимптотой. Очевидно, что гиперболы с очень маленькими полуосями, имеют вершины, расположенные вблизи узловых точек.

Для выбора такой гиперболы из класса кривых (4) заметим, что если правая вершина гиперболы будет находиться на вертикальной асимптоте кривой центров, то ее действительная полуось будет достаточно мала. Тогда одну из асимптот такой гиперболы (на черт. 9 гипербола изображена без асимптот, так как она почти сливается с асимптотами) можно принять за сторону AB треугольника ABC, которая образует с осью OX угол, равный $\frac{\pi+3\alpha}{3}$, если делению подлежит угол 3α.

Положим в уравнении (4) $r=1$. Тогда уравнение кривой центров примет вид $y=\frac{x}{k+4\sqrt{k^2+1}\,x}$ и, следовательно, уравнение вертикальной асимптоты кривой центров запишется в форме $x=-\frac{k}{4\sqrt{1+k^2}}$. Абсцисса правой вершины гиперболы вычисляется по формуле, найденной ранее. Она имеет вид

$$p=\sqrt{\left(\frac{k^2q}{4q\sqrt{k^2+1}-1}-q+\frac{2q\sqrt{1+k^2}-1}{q}\right)\frac{q}{4q\sqrt{1+k^2}-1}}-$$

$$-\frac{kq}{4q\sqrt{1+k^2}-1}.$$

Так как мы отыскиваем гиперболу, правая вершина которой находится на вертикальной асимптоте, то это означает выполнение равенства $p=-\frac{k}{4\sqrt{k^2+1}}$, где p определяется предыдущей формулой. Решая это уравнение относительно q, получим $q=\frac{9k^2+8+k\sqrt{81k^2+84}}{8\sqrt{1+k^2}}$.

Так как для нас важно, чтобы центр кривой был как можно дальше от окружности, то в полученной формуле радикал возьмем со знаком плюс. Найдем теперь уравнение асимптот этой гиперболы. Для этого выразим вна-

чале координаты центра гиперболы через q. Полагая $y_ц = q$, найдем $x_ц = -\frac{kq}{4q\sqrt{1+k^2}-1}$. Уравнение асимптот примет вид

$$y - q = \pm\sqrt{4q\sqrt{k^2+1}-1}\left(x + \frac{kq}{4q\sqrt{1+k^2}-1}\right).$$

Угловой коэффициент асимптот равен

$$k_1 = \sqrt{4q\sqrt{1+k^2}-1}\,.$$

Подставляя найденное ранее значение q в эту формулу, получим

$$k_1 = \sqrt{\frac{9k^2+6+k\sqrt{81k^2+84}}{2}}\,. \qquad (15)$$

Это и есть угловой коэффициент асимптот гиперболы, правая вершина которой находится на вертикальной асимптоте кривой центров. При $k = \sqrt{3}$ имеем $k_1 = \sqrt{\frac{33+\sqrt{3\cdot 327}}{2}}$. Несмотря на простой вид, эта формула дает довольно высокую точность. Так, например, вычисленное выше значение дает $tg80° = 5{,}67102$. Ошибка не превышает 1,7″. При этом следует помнить, что при делении углов, больших 60°, ошибка будет быстро уменьшаться вместе с возрастанием угла, подлежащего делению, в силу следующих двух причин:

1. Чем ближе угол, который требуется разделить, к 90^0, тем вертикальнее становится положение прямой AB. Поэтому расстояние от центра гиперболы центров до вертикальной асимптоты, то есть действительная полуось, становится очень малой.

2. Вследствие удаленности центра гиперболы от окружности, точка гиперболы, пройдя большой путь от вершины до окружности, почти сольется со своей асимптотой.

В силу этих причин можно утверждать, что чем больше k, тем большая точность обеспечивается формулой (15).

Однако при делении углов, меньших 60°, пользоваться этой формулой нецелесообразно, так как при этом центр искомой гиперболы, принадлежащей классу (4), будет находиться близко от окружности. Вследствие этого, большая полуось будет недостаточно мала и асимптота гиперболы не будет с достаточной точностью определять угловой коэффициент прямой AB.

Поэтому для деления углов меньших 60^0 следует пользоваться другой формулой. Ее можно получить проведя аналогичные рассуждения, но только по отношению к горизонтальной асимптоте кривой центров. Эта формула имеет вид

$$k_1 = k \sqrt{\frac{2}{9 + 6k^2 + \sqrt{81 + 84k^2}}}\,. \tag{16}$$

Разделим, пользуясь этой формулой, угол, равный 30^0, на три равные части. Полагая $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ получим $\operatorname{tg} 10° = 0{,}176335$. Табличное значение: $\operatorname{tg} 10° = 0{,}176327$. Отметим, что при делении углов, меньших 30^0, точность, в силу высказанных ранее причин, резко увеличивается.

В заключение следует отметить, что формулы (15) и (16) могут быть видоизменены таким образом, что точность вычислений будет сколь угодно высока. Таким образом, можно получить последовательность формул этого вида, дающих все более высокую точность. Для этого следует использовать кривые других классов, среди которых можно выбрать кривые со сколь угодно удаленными точками E_1, E_2, E_3. Поэтому гиперболы, выбранные по установленному выше правилу, почти совпадут со своими асимптотами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бляшке В. (ФРГ). Греческая и наглядная геометрия. «Математическое просвещение», 1958, № 3.

2. Шрубко Л. А. Трисекция угла, «Известия Академии наук Казахской ССР, серия геологии, выпуск 12, 1952.

3. Ковалев И. И. Об одном способе применения отображения инверсии к трисекции угла при помощи кривых второго порядка. Мелекесский пединститут. Ученые записки, том 4, часть 1, 1964.

4. Рыбников. К. А. История математики. Издание Московского университета, 1960.

5. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. Изд. 2, ГТТИ, М.—Л., 1938.

6. Аргунов Б. И. и Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. Учпедгиз, 1955.

7. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Физматгиз. М., 1959.

8. Савелов А. А. Плоские кривые. Физматгиз. М., 1960.

И. И. КОВАЛЕВ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ И НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ КУБИЧЕСКИХ РАДИКАЛОВ

Введение

Известно, что уравнения выше четвертой степени, вообще говоря, не разрешимы в радикалах. Однако имеются некоторые классы уравнений степени выше четвертой, корни которых могут быть выражены через коэффициенты этих уравнений с помощью радикалов.

В начале настоящей статьи рассматривается один из таких классов, а именно: класс уравнений n-й степени, которые получаются при решении задачи о делении угла на n равных частей и выводится формула для их решения. Затем предлагается способ, позволяющий вывести формулу для решения произвольных уравнений 3-й степени, которая отлична от формулы Кардано. И хотя при решении кубических уравнений обычно не пользуются ни формулой Кардано, ни другими формулами, которые известны в настоящее время, так как имеется много приближенных способов решения этих уравнений, однако нельзя исключить возможность применения этих формул в теоретических исследованиях, особенно, если они достаточно компактны. Указанный в статье способ решения кубических уравнений может быть применен и для решения уравнений четвертой степени, а также для вывода достаточных признаков разложимости уравнения шестой степени на кубические множители. После этого устанавливаются некоторые соотношения между

значениями кубических радикалов из мнимых чисел с различными аргументами.

Если вычислены все значения кубического радикала из какого-нибудь мнимого числа $a+bi$, то естественно поставить вопрос — сколько радикалов из мнимых чисел можно выразить через найденные значения $\sqrt[3]{a+bi}$, не прибегая непосредственно к извлечению кубического корня?

Очевидно, что множество таких радикалов является по крайней мере счетным, ибо извлечение кубического корня из мнимого числа с аргументом α связано с нахождением значений косинусов и синусов угла $\frac{\alpha}{3}$ и если эти значения найдены, то могут быть извлечены, например, корни из чисел, имеющих аргументы 2α, 4α, $2^n\alpha$ или $\frac{\alpha}{2}, \ldots, \frac{\alpha}{2^n}$ и т. д.

В настоящей статье соображения, которые привели к выводу соотношений между значениями кубических радикалов из мнимых чисел с различными аргументами, позволяют поставить вопрос: не имеет ли множество упомянутых выше радикалов мощность континуума? Однако этот вопрос, остается проблематичным.

При этом, конечно, следует иметь в виду, что предлагая алгоритм для построения множества радикалов третьей степени указанного вида, мы не можем найти в этом множестве какой-либо заранее данный радикал из произвольного, но фиксированного мнимого числа. Если бы это было возможным, то тем самым был бы указан путь для вычисления кубических радикалов из любого комплексного числа через найденные значения произвольного другого кубического радикала.

§ 1. Решение уравнений, получаемых при решении задачи о делении угла на n равных частей

Рассмотрим уравнения, получаемые при решении задачи о делении угла на n равных частей.

Пусть $n = 3$.

Тогда, как известно, $\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha(3 - \operatorname{tg}_2\alpha)}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Если $\operatorname{tg}3\alpha = k$ и $\operatorname{tg}\alpha = y$, то решение задачи о трисекции угла сводится к решению уравнения: $\dfrac{y(3 - y_2)}{1 - 3y^2} = k$

или:
$$y^3 - 3ky^2 - 3y + k = 0. \tag{1}$$

Это уравнение может быть решено в радикалах при помощи комплексной подстановки:
$$y = \frac{ix + 1}{x + i}. \tag{α}$$

Указанная подстановка обладает свойством приводить уравнения вида (1) к двучленным уравнениям.

Действительно, подставляя вместо y выражение (α), получим после приведения подобных членов:
$$(k - i)x^3 + (1 - ki) = 0,$$

т. е.:
$$x = \sqrt[3]{\frac{ki - 1}{k - i}}.$$

Тогда:
$$y = \operatorname{tg}\alpha = \frac{i\sqrt[3]{\dfrac{ki - 1}{k - i}} + 1}{\sqrt[3]{\dfrac{ki - 1}{k - i}} + i}.$$

Комплексная подстановка (α) приводит к двучленным уравнениям все уравнения, получаемые при решении задачи о делении угла на n равных частей указанным выше способом. При $n = 2$ решение соответствующего уравнения будет иметь вид: $x = \sqrt{\dfrac{k + i}{k - i}}$. При $n = 4$, $x = \sqrt[4]{\dfrac{k + i}{i - k}}$.

Если $n = 5$, то
$$x = \sqrt[5]{\frac{ki - 1}{i - k}}.$$

Можно подметить закономерность образования корней в зависимости от n: $x = \sqrt[n]{i^{n+2}\frac{k+i}{k-i}}$. $\quad (\beta)$

Эта закономерность может быть доказана методом математической индукции.

Если найденные значения x подставить в выражение (α), то мы получим формулу для решения уравнений указанного вида. Таким образом, можно сформулировать и доказать теорему: **Все уравнения, получаемые при решении задачи о делении угла на n равных частей, могут быть решены в радикалах, при этом, если $\operatorname{tg}3\alpha = k$, то $y = \operatorname{tg}\alpha$ определяется по формуле:**

$$y = \operatorname{tg}\alpha = \frac{i\sqrt[n]{i^{n+2}\frac{k+i}{k-i}}+1}{\sqrt[n]{i^{n+2}\frac{k+i}{k-i}}+i}. \qquad (\gamma)$$

Примечание. Удобнее применить метод математической индукции для доказательства формулы (γ), а не (β).

§ 2. Решение уравнений третьей и четвертой степени

Пусть требуется решить уравнение:

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим уравнение третьей степени, корни которого без труда могут быть найдены:

$$(x+a)^3 = \sigma\,(x+b)^3 \qquad (3)$$

Здесь a, b и $\sigma \neq 1$ — некоторые параметры. Очевидные решения этого уравнения определяются из $x+a = \sqrt[3]{\sigma}(x+b)$ при различных значениях $\sqrt[3]{\sigma}$. После раскрытия скобок в уравнении (3) и переноса всех членов уравнения в левую часть, получим уравнение третьей степени, решение которого нам известно. Остается теперь подобрать параметры таким образом, чтобы уравнение (3) совпало бы с данным уравнением (2). Срав-

нивая коэффициенты уравнений (2) и (3), мы получим, что параметр b должен быть определен из уравнения:

$$(p_1^2-3p_2)b^2-(p_1p_2-9p_3)b+p_2^2-3p_1p_3=0.$$

После этого находим: $a=\dfrac{p_2-p_1b}{p_1-3b}$; $\sigma=\dfrac{p_1^2-3p_2}{(p_1-3b)^2}$.

Корни же данного уравнения, как отмечалось выше, находятся из уравнения $x+a=\sqrt[3]{\sigma}(x+b)$, где a, b и σ — найденные числа. Отсюда: $x=\dfrac{b\sqrt[3]{\sigma}-a}{1-\sqrt[3]{\sigma}}$.

Эта формула отличается от формулы Кардано наличием в ней только одного кубического радикала.

Решим по этой формуле уравнение:

$$x^3-6x^2+11x-6=0.$$

Имеем последовательно: квадратное уравнение —

$$3b^2+12b+13=0.$$

$$b=-2+\frac{i}{\sqrt{3}},\quad a=-2-\frac{i}{\sqrt{3}};\quad \sigma=\frac{36-33}{-3}=-1.$$

$$x-2-\frac{i}{\sqrt{3}}=-1\left(x-2+\frac{i}{\sqrt{3}}\right),\quad 2x=4,\quad x=2.$$

При другом значении $\sqrt[3]{\sigma}=\sqrt[3]{-1}$ получим:

$$x-2-\frac{i}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-2+\frac{i}{\sqrt{3}}\right).$$

Отсюда: $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, или $x=1$.

Аналогично найдем третий корень $x=3$.

Наиболее просто пользоваться этой формулой, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют соотношению:

$$p_2^2-3p_1p_3=0.$$

Пусть требуется решить уравнение:

$$x^3 + 6x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

Квадратное уравнение для определения b примет вид:

$27b^2 - \left(18 - \frac{9}{2}\right) b = 0$. Отсюда одно из значений $b = 0$.

Тогда $\quad a = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

Решение: $x + \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\, x$, или: $x = \frac{1}{2\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - 1\right)}$.

Аналогичным образом можно поступать и для нахождения решений уравнения четвертой степени.

Для этого в качестве исходного уравнения, корни которого легко найти, возьмем уравнение:

$$(x^2 + bx + c)^2 = \sigma(x + m)^2 \qquad (4)$$

Для решения уравнения четвертой степени

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$$

сравним коэффициенты этого уравнения с коэффициентами уравнения, полученного после раскрытия скобок в уравнении (4). Приравнивая коэффициенты, мы найдем числа b, c, m и σ, а потом, решая квадратное уравнение $x^2 + bx + c = \sqrt{\sigma}(x + m)$, получим решение данного уравнения.

Так как при этом получается формула, почти совпадающая с формулой, полученной при решении уравнения способом Феррари, то выкладок производить не будем.

§ 3. Достаточный признак разложимости левой части уравнения шестой степени на кубические множители

Способ, примененный для решения уравнений третьей и четвертой степеней, можно использовать и для вывода некоторых соотношений между коэффициентами уравнений более высоких степеней, при выполнении которых левые части этих уравнений разлагаются на множители. Отметим здесь одно из них, так как оно потребуется несколько позже.

Пусть дано уравнение:

$$x^6 + p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + p_4x^2 + p_5x + p_6 = 0. \qquad (5)$$

Так как рассуждения, необходимые для вывода указанного признака, совершенно аналогичны проделанным ранее, то сформулируем лишь конечный результат:
Если коэффициенты уравнений (5) удовлетворяют соотношению:

$$\left(\frac{p_1 p_5}{2\sqrt{p_6}} + 2\sqrt{p_6} - p_3\right)^2 = 4\left(\frac{p_1^2}{4} + \frac{p_5}{\sqrt{p_6}} - p_2\right)\left(p_1\sqrt{p_6} + \frac{p_5^2}{4p_6} - p_4\right), \qquad (6)$$

то уравнение (5) можно разложить на два множителя:

$$x^3 + \left(\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4} + \frac{p_5}{\sqrt{p_6}} - p_2}\right)x^2 + \left(\frac{p_5}{2\sqrt{p_6}} \pm \frac{\dfrac{p_1 p_5}{2\sqrt{p_6}} + 2\sqrt{p_6} - p_3}{2\sqrt{\dfrac{p_1^2}{4} + \dfrac{p_5}{\sqrt{p_6}} - p_2}}\right)x + p_6 = 0, \qquad (7)$$

где у одного множителя нужно взять верхние знаки, а у другого — нижние.

§ 4. Об одном множестве взаимозависимых радикалов третьей степени

Рассмотрим снова уравнение вида (1), составленное для решения задачи о трисекции угла:

$$\omega^3 - 3k\omega^2 - 3\omega + k = 0. \qquad (1')$$

Если решать это уравнение по формуле Кардано, то под знаком кубического радикала будем иметь выражение:

$$(k^2+1)\ (k\pm i). \qquad (\beta)$$

Отсюда видно, что при делении угла, тангенс которого равен k, на три равные части, мы получаем выражение вида (β), у которого отношение действительной части к коэффициенту при мнимой части равно $\pm k$. Это число в дальнейшем будем называть структурой подкоренного выражения формулы Кардано, или еще короче — структурой подкоренного выражения. Очевидно, что существует бесчисленное множество мнимых чисел с одинаковыми структурами, т. е. таких чисел, котангенс аргумента которых, один и тот же.

Предположим, что при каком-либо k уравнение семейства (1′) решено и, следовательно, найдено значение $\sqrt[3]{k+i}$.

Поставим теперь вопрос: какие другие уравнения со структурой подкоренного выражения, отличной от структуры подкоренного выражения данного уравнения (т. е. от числа $\pm k$) можно решить, не прибегая снова к вычислению кубического радикала? Или иначе — корни каких уравнений со структурой подкоренного выражения, отличной от $\pm k$, могут быть выражены через найденные корни данного уравнения? Некоторые уравнения такого вида можно указать. Например, если решено уравнение (1′) при каком-либо k, то можно решить уравнение с другой структурой подкоренного выражения. Например, можно решить в этом случае уравнение

$\omega^3 - \dfrac{6k}{1-k^2}\,\omega^2 - 3\omega + \dfrac{2k}{1-k^2} = 0$, так как это означает, что

если какой-либо угол разделен на три равные части, то и удвоенный угол можно разделить на три равные части.

Таким образом, очевидно, что если решено уравнение (1′), то можно решить бесчисленное множество уравнений с другой структурой подкоренного выражения, связанных с решением задачи о трисекции удвоенного, учетверенного, или, вообще, угла в 2^n раз большего или в 2^n раз меньшего, чем данный угол. Получать из данного уравнения семейства (1′), корни которого найдены, другие уравнения с измененной структурой подкоренного выражения путем применения линейной подстановки нельзя, так как после применения линейной подстановки мы получим уравнение с той же структурой подкоренного выражения, что и у данного. Можно предположить, что нарушить структуру подкоренного выражения можно, применив подстановку более высокой степени. Однако при применении подстановки второй степени мы получим уравнение шестой степени, которое, вообще говоря, нельзя решить в радикалах. Попытаемся тем не менее пойти по этому пути. С этой целью для решения уравнения вида (1′) применим подстановку $\omega = \dfrac{z^2 + cz + b}{2z}$

Будем рассматривать эту функцию как функцию комплексного аргумента. При $c=0$ и $b=1$ эта функция является функцией Жуковского. Если же b и c имеют другие значения, то характер отображения будет тот же, что и у функции Жуковского. Легко убедиться в том, что эта функция отображает окружность $z = be^{i\varphi}$ на интервал с центром в точке $\dfrac{c}{2}$ и радиусом, равным b. При этом, когда точка z описывает эту окружность, то точка ω описывает указанный интервал дважды в противоположных направлениях. Отсюда вытекает, что ω может быть действительным числом (а при решении уравнений вида (1′) оно должно быть действительным) только в двух случаях:

1) Если z — действительное число,

2) если z — точка окружности $z = b\,e^{i\varphi}$.

Так как числа b и c произвольны, то всегда можно подобрать такие их значения, чтобы соответствующий

интервал содержал бы любое число корней уравнения (1′), а также либо содержал все корни, либо не содержал ни одного корня этого уравнения. В зависимости от этого, мы можем заранее предвидеть, какое число мнимых корней будет иметь уравнение шестой степени, полученное после применения подстановки. Так, например, если b и c таковы, что все корни уравнения (1′) находятся внутри интервала, определяемого этими числами, то это означает, что все корни уравнения шестой степени будут мнимыми, так как внутрь интервала отображаются точки окружности, за исключением точек $z=-1$ и $z=1$, изображающие, как известно, мнимые числа.

Учитывая это, можно было бы дать удобную геометрическую интерпретацию и пояснить, почему уравнения третьей степени, имеющие три действительных корня, невозможно решить с помощью радикалов из действительных чисел.

Применим теперь указанную подстановку к уравнению (1′). Получим уравнение шестой степени:

$$z^6+(3c-6k)z^5-(12kc+12-3c^2-3b^2)z^4+$$
$$[8k-6kc^2-12c+c^3+(6c-12k)b^2]z^3-(12kc+$$
$$+12-3c^2-3b^2)b^2z^2+(3c-6k)b^4z+b^6=0. \qquad (8)$$

Решение этого уравнения может быть сведено к решению уравнения третьей степени путем применения приема, при помощи которого решаются возвратные уравнения, однако с точки зрения поставленной задачи этот способ ни к чему не приводит, так как полученное уравнение третьей степени имеет ту же структуру подкоренного выражения, что и уравнение (1′). Поэтому попытаемся разложить левую часть уравнения (8) на множители. Для этого потребуем, чтобы коэффициенты уравнения (8) удовлетворяли условию (6). Это условие сначала примет вид:

$$\left[\frac{(3c-6k)^2}{2}b+2b^3-(8k-6kc^2-12kb^2-12c+c^3+6b^2c)\right]^2=$$
$$=4b^2\left[\frac{(3c-6k)^2}{4}+b(3c-6k)+12kc+12-3c^2-3b^2\right]^2.$$

После извлечения квадратного корня из обеих частей мы получим два условия:

$$1)\ c^3-6(k+b)c^2-12(1-b^2-2bk)c-8(b^3+3kb^2-3b-k)=0.$$

$$2)\ c^3-(6k+3b)c^2+12(kb-1)c+4b^3-(36k^2+24)b+8k=0.$$

Нахождение пары чисел b и c, удовлетворяющих первому условию, связано с решением уравнения третьей степени, имеющего три действительных корня. При этом найденные b и c определяют интервал, внутри которого, как правило, находится один корень, но не все три корня данного уравнения (1′). Вследствие этого, по крайней мере одно из кубических уравнений, на которые распадается уравнение (8), будет иметь только один действительный корень.

Пару чисел b и c, удовлетворяющих второму условию, можно найти, не решая кубическое уравнение. Однако соответствующий интервал при этом либо не содержит ни одного корня уравнения (1′), либо, наоборот, содержит все три корня этого уравнения*.

Вследствие этого множители, на которые разлагается левая часть уравнения (8), будут иметь либо все действительные нули, либо все мнимые. В последнем случае коэффициентами кубических уравнений будут мнимые числа.

Посмотрим теперь, какие уравнения можно решить, если исходить из деления угла 135°. В этом случае $k=-1$. Возьмем пару чисел b и c, удовлетворяющих второму из условий разложимости. Этому условию удовлетворяют, например, числа $b=-\frac{k}{3}$; $c=\frac{4}{3}k$.

При $k=-1$ получим: $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{4}{3}$.

---

* Если бы интервалы были того же характера, что и интервалы, определяемые первым условием, то это означало бы ликвидацию неприводимого случая, получаемого при решении кубических уравнений с тремя действительными корнями.

Уравнение (8) примет вид:

$$z^6 + 2z^5 - \frac{67}{3} z^4 + \frac{452}{27} z^3 - \frac{67}{27} z^2 + \frac{2}{81} z + \frac{1}{27^2} = 0. \qquad (9)$$

Кубические множители, на которые разлагается левая часть уравнения (9), найдем по формуле (7). Тогда получим два уравнения:

$$z^3 + \left(1 \mp 2\sqrt{6}\right) z^2 + \frac{1}{3}\left(1 \pm 2\sqrt{6}\right) z + \frac{1}{27} = 0. \qquad (10)$$

Возьмем верхние знаки. Подкоренное выражение формулы Кардано у этого уравнения имеет вид:

$$2\sqrt{6} - 4 + i\,\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},$$

т. е. не $-1+i$, как у уравнения (1′) при $k=-1$.

Кубический радикал формулы Кардано для уравнения (10) может быть найден следующим образом:

1) найдем решения уравнения (1′) при $k=-1$. Так, например, одним из корней этого уравнения будет число $\omega=1$.

2) Определим числа Z, удовлетворяющие уравнению $\dfrac{z^2+cz+b^2}{2z} = 1$, где $b=\dfrac{1}{3}$, $c=-\dfrac{4}{3}$. Эти значения Z являются корнями уравнения (10).

3) Зная корни уравнения (10), можно найти и значения кубического радикала формулы Кардано.

Таким образом, значения радикала $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-4+i\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$ могут быть найдены указанным способом без непосредственного извлечения кубического корня из мнимого числа. Следовательно, решив уравнение $\omega^3+3\omega^2-3\omega-1 = 0$, мы сможем решить уравнение:

$$\omega^3 - 3\,\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{6} - 4\right)\omega^2 - 3\omega + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{6} - 4\right) = 0,$$ кото-

рое имеет измененную структуру подкоренного выражения формулы Кардано по сравнению с исходным уравнением.

Зная решения этого нового уравнения, мы сможем, применив указанные выше рассуждения, извлечь кубический корень из числа с другой структурой, и вследствие этого решить новое кубическое уравнение семейства (1′), т. е. уравнение, которое получится из уравнений семейства (1′) при k, равном структуре подкоренного выражения радикала, значения которого только что найдены. Таким образом, исходя только из одной пары чисел b и c, удовлетворяющих второму из условий разложимости, мы сможем получить бесчисленное множество уравнений с различными структурами подкоренных выражений, корни которых выражаются через корни данного уравнения.

Однако существуют и другие пары чисел b и c, удовлетворяющих второму соотношению. Каждая из этих пар может быть родоначальником счетного множества уравнений с различными структурами подкоренных выражений, которые решаются указанным выше способом. Можно указать, например, такую пару чисел $b = \dfrac{2k}{9k^2+12}$, $c = \dfrac{4k}{9k^2+12}$. При $k = -1$ имеем:

$$b = -\frac{2}{21}, \qquad c = -\frac{4}{21}.$$

Уравнение (8):

$$z^6 + \frac{38}{7} z^5 - \frac{2080}{7.21} z^4 + \frac{50056}{7.21^3} z^3 - \frac{4.2080}{7.21^3} z^2 + \frac{16.38}{7.21^4} z + \frac{2^6}{21^6} = 0.$$

Разложение:

$$z^3 + \frac{1}{7}\left(19 \pm 7\sqrt{21}\right) z^2 - \frac{2}{147}\left(19 \pm 7\sqrt{21}\right) z - \frac{8}{21^3} = 0.$$

Кубический радикал формулы Кардано:

$$\sqrt[3]{\left[44\sqrt{21} - 189 + \sqrt{21}i\right] \frac{16}{3.7^2}}\,.$$

Его структура: $\dfrac{44\sqrt{21}-189}{\sqrt{21}}$.

Замечаем, что другая пара чисел определяет и другую структуру подкоренного выражения, хотя мы и исходили из решения одного и того же уравнения, полученного из уравнений семейства (1′) при $k=-1$.

Однако легко заметить, что множество пар чисел, удовлетворяющих второму условию разложимости, имеет мощность континуума. Эти числа могут быть найдены без решения кубического уравнения.

Так, например, числа

$$b=-\frac{\alpha^3k^3-6\alpha^2k^2-12\alpha k+8k}{3\alpha^2k^2-12\alpha k^2-36k^2-48},$$

$$c=2b+\alpha k,$$

где α — произвольное действительное число, удовлетворяют второму условию разложимости. Следовательно, так как множество значений α имеет мощность континуума, то мощность множества чисел b и c, удовлетворяющих второму условию, имеет также мощность континуума.

Однако для того, чтобы утверждать, что множество уравнений с различными структурами подкоренных выражений, каждое из которых может быть решено с помощью одного уравнения (мы исходили, например, до сих пор из уравнений семейства (1′) при $k=-1$), имеет мощность континуума, необходимо еще выяснить, что каждой паре чисел b и c соответствуют не только различные уравнения, но и уравнения с различными структурами подкоренных выражений. Поэтому, исходя из изложенного выше, мы можем только конструировать уравнения, отличные от указанных выше уравнений, получаемых при делении углов $2^n\alpha$ или $\frac{1}{2^n}\alpha$ и т. д. на три равные части и решать их, зная только, что корнем уравнения (1′) является число $\omega=1$. Геометрическая природа этих уравнений остается пока невыясненной. Другими словами, неясно пока, почему, например, умея разделить угол, равный 135°, на три равные час-

ти в смысле возможности решения уравнения (1′) при $k=-1$, мы сможем разделить и угол, котангенс которого определяется формулой $k=\mathrm{ctg}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(2\sqrt{6}-4)$, не извлекая корня кубичного из мнимого числа.

Н. И. ШАРАПОВ

О НЕПРИВОДИМОСТИ И ПРИВОДИМОСТИ ПОЛИНОМОВ 8-й СТЕПЕНИ

Введение

В течение последних 100 лет исследованием полиномов 8-й степени и, в частности, вопросом об их неприводимости и приводимости занимались многие алгебраисты. В качестве примеров приведем нижеследующие сочинения:

1. Ермаков В. П. **«Алгебраические уравнения, решаемые в радикалах»**, Киев, 1901.

2. Шмидт О. Ю. **«Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа»**. Универс. известия. Киев, 1913.

3. Wilshaus F. **«Über die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen achten Grades»**. Marburg. 1888.

4. Mertens F. **«Die Gestalt der Wurzeln einer irreduktiblen Galoischen Gleichung achten Grades»**. Wien. Berichte der Akademie. Bd. 129, 920.

Однако большинство авторов при исследовании полиномов 8-й степени исходили из теории Гаула, в которой алгебраическая задача считается решенной, если указана последовательность операций, требуемых для ее решения, но выполнимы ли на практике эти операции — подобного вопроса в теории Галуа не ставится. Поэтому в знаменитой исторической задаче об алгебраическом решении уравнений у Галуа остается невыясненным вопрос о фактическом вычислении корней данного уравнения. В этом смысле методы теории Галуа являются неэффективными. В 1940 году значительный сдвиг в решении этой проблемы был сделан профессором Ростовского н/Д университета Вельми-

ным В. П. в его работе «К теории решения алгебраических уравнений в радикалах» (Ростов-на-Дону, 1940).

Используя приближенные значения корней уравнений и некоторые свойства целых алгебраических чисел, он дал эффективный метод решения некоторых видов уравнений 5-й степени. В данной статье показывается, как на основе метода В. П. Вельмина решить вопрос о неприводимости или приводимости произвольного полинома 8-й степени с целыми коэффициентами.

§ 1.

Некоторые свойства целых алгебраических чисел

В данной работе вопрос о неприводимости и приводимости полиномов 8-й степени исследуется с помощью приближенных значений их корней. Для этой цели очень удобно пользоваться методом Н. И. Лобачевского, позволяющим вычислять все корни полиномов как действительные, так и мнимые

Используя, кроме того, некоторые свойства целых алгебраических чисел, можно с помощью небольшого количества простейших вычислений быстро решить вопрос о неприводимости или приводимости любого заданного полинома 8-й степени.

1. Изучаемый полином я буду брать в виде:

$$f(x) = x^8 + a_1x^7 + a_2x^6 + \dots + a_7x + a_8, \qquad (1)$$

где a_i целые рациональные числа.

Это не является ограничением общности исследования, так как полином

$$A_0y^8 + A_1y^7 + \dots + A_7y + A_8$$

с помощью постановки

$$y = \frac{x}{A_0},$$

приводится к виду (1), причем коэффициенты a_i соответственно равны

$$a_i = A_0^{i-1} A_i,$$

т. е. являются целыми рациональными числами.

2. Корни уравнения (1) обозначим:

$$x_1, x_2, \ldots, x_8 \tag{2}$$

Числа x_i являются целыми алгебраическими.
Число ξ, определенное равенством:

$$\xi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_8), \tag{3}$$

где φ полином с целыми рациональными коэффициентами, также является целым алгебраическим.

Весьма важное значение имеет известное свойство числа ξ, согласно которому число ξ в случае рациональности должно быть целым рациональным числом.

3. Предположим, что определенное равенством (3) число ξ вычислено путем использования приближенных значений аргументов x_i. Если ошибка найденного значения не может превысить числа η, разность $\xi_0 - k$ между приближенным значением ξ_0 и ближайшим целым рациональным числом k по абсолютной величине больше η:

$$|\xi_0 - k| > \eta, \tag{4}$$

то число ξ не может быть рациональным.

Такое заключение является вполне строгим, несмотря на использование лишь приближенного значения ξ_0 числа ξ.

Если, наоборот, имеем неравенство

$$|\xi_0 - k| < \eta, \tag{5}$$

то имеет место альтернатива:
или $\xi = k$, или ξ есть число иррациональное.

4. Для фактического нахождения числа η допустим, что число $\bar{x}_i$ есть приближенное значение числа x_i' причем погрешность не может превысить по абсолютной величине числа ε_i. Полагаем:

$$x_i = \bar{x}_i + h_i, |h_i| < \varepsilon_i, i = 1,2,\ldots,8. \tag{6}$$

Пишем соотношения:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_8) - \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_8) = \sum_{i=1}^{8} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{x}_i}\right| \cdot h_i + \Theta, \tag{7}$$

где Θ величина второго порядка малости относительно h_i. Переходя от равенства (7) к неравенству модулей, получим:

$$|\varphi(x_1,x_2,\ldots x_8)-\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots\bar{x}_8)| < \sum_{i=1}^{8}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_i}\right|\cdot|h_i|+|\Theta|.$$

На основании (6) и малости числа Θ можно принять

$$\eta=\sum_{i=1}^{8}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_i}\right|\cdot\varepsilon_i. \tag{8}$$

Тогда получим:

$$|\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_8)-\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_8)|<\eta, \text{ т. е. } |\xi-\xi_0|<\eta. \tag{9}$$

Если все корни x_i найдены с равномерной точностью, то есть:

$$\varepsilon_i=\varepsilon, \tag{10}$$

то равенство (8) принимает более простой вид:

$$\eta=\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{8}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_i}\right|. \tag{11}$$

Для упрощения формул будем предполагать, что корни полинома (1) вычисляются с равномерной точностью.

§ 2. Исследование вопроса неприводимости или приводимости полиномов

I. О приводимости полинома восьмой степени

Предположим, что полином (1) приводим в поле обыкновенных рациональных чисел. Тогда можно написать:

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x), \tag{12}$$

где f_1 и f_2 полиномы с рациональными коэффициента-

ми, ни один из которых не сводится к постоянному. Если принять:

степень $f_1(x) \leqslant$ степени $f_2(x)$, то $f_1(x)$ может быть лишь 1, 2, 3 или 4 степеней. Так как числа x_i целые алгебраические, то коэффициенты полинома $f_1(x)$ должны быть целыми рациональными числами.

Пусть корни $f_1(x)$ соответственно равны

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \tag{13}$$

Совокупность (13) составлена из некоторых m чисел совокупности (2).

Полагаем:

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m = \sum \xi_i = k_1$$

$$\xi_1 \xi_2 + \dots + \xi_{m-1} \xi_m = \sum \xi_i ; \xi_j = k_2 \tag{14}$$

$$\sum \xi_i \xi_j \xi_l = k_m. \tag{15}$$

Числа $k_1, k_2, \dots, k_m$ (15) должны быть целыми рациональными.

Таким образом, для приводимости полинома (1) необходимо и достаточно существование некоторой последовательности m корней этого плинома ($m \leqslant 4$), для которой числа k_1, k_2, ..., оказываются целыми рациональными.

Нетрудно установить наличие или отсутствие такой последовательности с помощью указанного в первой главе приема. Мы отдельно рассмотрим четыре возможных случая.

Случай $m = 1$. Если полином $f(x)$ имеет в поле рациональных чисел делитель первой степени, то один из корней x_i должен быть целым рациональным числом.

Этот случай явно не может иметь места, если для всех корней x_i разность между их приближенными значениями и ближайшими целыми числами превосходит по абсолютной величине число ε.

Если же для некоторого корня x_i имеем неравенство

$$|\overline{x}_i - k| < \varepsilon, \tag{16}$$

где k целое рациональное число, то делим $f(x)$ на двучлен $x - k$. Если деление выполняется без остатка, то

полином f(x) окажется приводимым и разложение (12) найденным.

Таким образом, видим, что исследование случая $m=1$ выполняется без всяких затруднений.

Случай $m=2$. Рассматриваем 28 чисел:

$$\varphi_{ij} = x_i + x_j,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., 8. \tag{17}$$

Пусть $k_{i,j}$ ближайшее целое число к сумме $x_i + x_j$. Если для всех значений i, j имеем

$$|\bar{x}_i + \bar{x}_j - k_{i,j}| > \eta = 2\varepsilon, \tag{18}$$

то ни одна из сумм $x_i + x_j$ не может быть целым рациональным числом, т. е. полином f(x) не может иметь квадратный делитель с рациональными коэффициентами. Если же для некоторой комбинации i, j имеем

$$|\bar{x}_i + \bar{x}_j - k_{i,j}| < 2\varepsilon,$$

то вычисляем $\bar{x}_i\,\bar{x}_j$ и обозначаем через $l_{i,j}$ ближайшее к нему целое рациональное число. Определяем η согласно (11); легко получим:

$$\eta = \{|\bar{x}_i| + |\bar{x}_j|\} \cdot \varepsilon.$$

Если окажется

$$|\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j - l_{i,j}| > \{|\bar{x}_i| + |\bar{x}_j|\} \cdot \varepsilon, \tag{19}$$

то комбинация корней x_i, x_j не приводит к квадратному делителю с целыми рациональными коэффициентами.

Если же получим

$$|\bar{x}_i\,\bar{x}_j - l_{i,j}| < \{|\bar{x}_i| + |\bar{x}_j|\} \cdot \varepsilon,$$

то пробуем делить f(x) на квадратный трехчлен

$$x^2 - k_{i,j}\,x + l_{i,j}. \tag{20}$$

В случае выполнения деления без остатка будет найден квадратный делитель и установлена приводимость полинома (1). В противном случае устанавливается отсутствие такового делителя.

Таким образом исследование легко оканчивается и в случае $m=2$.

Случай $m=3$. Нужно рассматривать 56 чисел:

$$\varphi_{i,j,l} = x_i + x_j + x_l, \tag{21}$$

где среди индексов i, j, l нет равных. Обозначим через $k_{i,j,l}$ ближайшее целое число к сумме $\bar{x}_i + \bar{x}_j + \bar{x}_l$. Если для всех комбинаций i, j, l встретим неравенства

$$|\bar{x}_i + \bar{x}_j + \bar{x}_l - k_{i,j,l}| > \eta_1 = 3\varepsilon, \tag{22}$$

то ни одна из сумм $x_i + x_j + x_l$ не может равняться целому рациональному числу, т. е. полином $f(x)$ не имеет кубических делителей с рациональными коэффициентами.

Пусть, наоборот, для некоторой комбинации i, j, l имеем:

$$|\bar{x}_i + \bar{x}_j + \bar{x}_l - k_{i,j,l}| < 3\varepsilon.$$

Вычисляем значение выражения:

$$\bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{x}_i\bar{x}_l + \bar{x}_j\bar{x}_l.$$

Обозначаем через k_2 ближайшее к нему целое рациональное число.

Равенство (11) позволяет написать:

$$\eta_2 = 2\{|x_i| + |x_j| + |\bar{x}_l|\} \cdot \varepsilon. \tag{23}$$

Если имеем:

$$|\bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{x}_i\bar{x}_l + \bar{x}_j\bar{x}_l - k_2| > \eta_2, \tag{24}$$

то число $x_ix_j + x_ix_l + x_jx_l$ не может быть целым, и комбинация i, j, l опять не дает кубического делителя полинома $f(x)$ с рациональными коэффициентами.

Если же, наоборот, имеем неравенство:

$$|\bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{x}_i\bar{x}_l + \bar{x}_j\bar{x}_l - k_2| < \eta_2, \tag{25}$$

то составляем выражение $\bar{x}_i\bar{x}_j\bar{x}_l$ и обозначаем через k_3 ближайшее к нему целое рациональное число.

Имеем:

$$\eta_3 = \{|\bar{x}_i \bar{x}_j| + |\bar{x}_i \bar{x}_l| + |\bar{x}_j \bar{x}_l|\} \cdot \varepsilon. \tag{26}$$

Если:

$$|\bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_l| > \eta_3, \tag{27}$$

то число $x_i x_j x_l$ не может быть целым, и мы опять не получим кубический делитель с рациональными коэффициентами. В том случае, если

$$|\bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_l - k_3| < \eta_3, \tag{28}$$

то переходим к делению полинома $f(x)$ на полином:

$$x^3 - k_1 x^2 + k_2 x - k_3 = \Psi(x). \tag{29}$$

Если деление выполняется без остатка, то приводимость полинома $f(x)$ доказана и само разложение найдено.

Если деление не выполняется без остатка, то все числа

$$x_i + x_j + x_l, \quad x_i x_j + x_i x_l + x_j x_l, \quad x_i x_j x_l,$$

не могут одновременно быть целыми и $f(x)$ не имеет кубических делителей с рациональными коэффициентами.

Исследование случая $m=3$ на этом заканчивается.

Случай $m=4$. Нужно рассматривать 70 чисел:

$$x_i + x_j + x_l + x_n = \varphi_{i,j,l,n}, \tag{30}$$

где среди индексов нет двух равных. Полагаем $\eta_4 = 4\varepsilon$.

Если для всех комбинаций индексов имеем неравенства:

$$|\bar{x}_i + \bar{x}_j + \bar{x}_l + \bar{x}_n - k_{i,j,l,n}| > 4\varepsilon, \tag{31}$$

то $f(x)$ не имеет неприводимых делителей четвертой степени. Пусть, однако, для некоторой комбинации i, j, l, n получим противоположное неравенство:

$$|\bar{x}_i + \bar{x}_j + \bar{x}_l + \bar{x}_n - k_{i,j,l,n}| < 4\varepsilon. \tag{32}$$

Полагаем для краткости

$$k_{1,j,l,n} = k_1. \tag{33}$$

Составляем числа

$$\sum \bar{x}_1 \bar{x}_j, \quad \sum \bar{x}_1 \bar{x}_j \bar{x}_l, \quad \sum \bar{x}_1 \bar{x}_j \bar{x}_l \bar{x}_n. \tag{34}$$

и обозначаем ближайшие к ним целые числа через

$$k_2, \; k_3, \; k_4. \tag{35}$$

Кроме того, полагаем:

$$\eta_2 = 3\{|\bar{x}_1| + |\bar{x}_j| + |\bar{x}_l| + |x_n|\}\varepsilon. \tag{36}$$

$$\eta_3 = 3\,\{|\bar{x}_1 \bar{x}_j| + |\bar{x}_1 \bar{x}_l| + \ldots + |\bar{x}_l \bar{x}_n|\}\varepsilon. \tag{37}$$

$$\eta_4 = \{|\bar{x}_1 \bar{x}_j \bar{x}_n| + \ldots + |\bar{x}_1 \bar{x}_j \bar{x}_l|\}\varepsilon. \tag{38}$$

Если нарушается хотя бы одно из неравенств:

$$\begin{aligned} &\left|\sum \bar{x}_1 \bar{x}_j - k_2\right| < \eta_2, \\ &\left|\sum \bar{x}_1 \bar{x}_j \bar{x}_l - k_3\right| < \eta_3, \\ &\left|\sum \bar{x}_1 \bar{x}_j \bar{x}_l \bar{x}_n - k_4\right| < \eta_4, \end{aligned} \tag{39}$$

то $f(x)$ не может иметь делителя четвертой степени с рациональными коэффициентами.

Если, наоборот, все неравенства (39) выполняются, то необходимо перейти к делению полинома $f(x)$ на полином

$$x^4 - k_1 x^3 + k_2 x^2 - k_3 x + k_4. \tag{40}$$

Если получится остаток, то $f(x)$ не имеет делителя четвертой степени. Если остатка нет, то $f(x)$ приводим и одновременно получается разложение $f(x)$ на произведение двух полиномов четвертой степени.

Исследование случая $m=4$ на этом заканчивается.

§ 3. О некоторых условиях приводимости

Выше были указаны приемы, с помощью которых можно либо убедиться в неприводимости полинома $f(x)$, либо найти разложение $f(x)$ на произведение неприводимых множителей. Существенное значение имеет выяснение наличия сумм нескольких корней, которые могут оказаться целыми рациональными числами.

Если корень x_1 число рациональное, то полином $f(x)$ разумеется, должен быть приводим.

Мы докажем здесь несколько теорем, относящихся к тому случаю, когда сумма двух или нескольких корней является числом рациональным.

Полином $f(x)$ напишем в виде:

$$x^8 - a_1 x^7 + a_2 x^6 - a_3 x^5 + \ldots - a_7 x + a_8 = f(x). \qquad (41)$$

Предположим, что сумма двух корней, например, $x_1 + x_2$ является рациональным числом:

$$x_1 + x_2 = b. \qquad (42)$$

Допустим, что полином $f(x)$ неприводим. Полагаем:

$$\varphi(x) = f(b - x). \qquad (43)$$

Очевидно, $\varphi(x)$, есть полином восьмой степени, старший коэффициент которого равен единице.

Можно написать:

$$\varphi(x_1) = f(b - x_1) = f(x_2) = 0.$$

Таким образом полином $\varphi(x)$ имеет с неприводимым полиномом $f(x)$ общий делитель $x - x_1$.

Это может быть только при условии делимости $\varphi(x)$ на $f(x)$; так как оба этих полинома восьмой степени имеют одинаковые старшие коэффициенты, то должно иметь место тождество:

$$\varphi(x) = f(b - x) = f(x). \qquad (44)$$

Мы получим возможность сделать такой вывод:

Теорема 1. **Если сумма двух корней полинома вось-**

мой степени f(x) равна целому числу b, но полином f(x) **не равен тождественно полиному f(b—x), то полином f(x) приводим.**

Если допустить существование тождества (44), то корни полинома f(x), очевидно, распадаются на четыре пары, сумма членов которых равна b:

$$x_1+x_2=b; \quad x_3+x_4=b; \quad x_5+x_6=b; \quad x_7+x_8=b.$$

Получаем новую теорему:

II. Если сумма двух корней полинома (41) равна целому числу, отличному от $\frac{1}{4}a$, то полином (41) приводим.

Теперь рассмотрим тот случай, когда сумма трех корней полинома (41) равняется целому рациональному числу:

$$x_1+x_2+x_3=b\ . \tag{45}$$

Предполагаем неприводимость полинома f(x).
Составляем полином $\Psi(x)$

$$\Psi(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-bx^2+\alpha x-\beta; \tag{46}$$

Числа α, β алгебраические. Предполагаем, что поле $R(\alpha, \beta)=R(\Theta)$ является полем K-ой степени, т. е. его примитивный элемент Θ удовлетворяет неприводимому уравнению степени k с рациональными коэффициентами. Имеем право написать:

$$f(x)=\Psi(x, \Theta_i)\varphi(x, \Theta_i). \tag{47}$$

Здесь $\varphi(x, \Theta)$ есть полином 5 степени относительно x, коэффициенты которого принадлежат полю $R(\Theta)$. Так как коэффициенты f(x) рациональные числа, то можно написать равенство:

$$f(x)=\Psi(x, \Theta_1)\varphi(x, \Theta), \tag{48}$$

где Θ_l любое из чисел, сопряженных с Θ, т. е. любой из корней неприводимого уравнения К-ой степени, которому удовлетворяет Θ.

Произведение:

$$\Psi(x,\Theta)\Psi(x,\Theta_1)\ldots\Psi(x,\Theta_{к-1}) = \Phi(x) \qquad (49)$$

должно быть полиномом с рациональными коэффициентами. Согласно (48) все корни полинома $\Psi(x, \Theta_l)$ должны быть корнями $f(x)$, откуда следует, что все корни $\Phi(x)$ также являются корнями $f(x)$. На основании неприводимости $f(x)$ заключаем, что $\Phi(x)$ делится на $f(x)$, т. е.

$$\Phi(x) = f(x)\cdot\Phi_1(x).$$

Если $\Phi_1(x)$ не приводится к постоянному числу, то все корни $\Phi_1(x)$ должны опять принадлежать $f(x)$, т. е. $\Phi_1(x)$ должно делиться на $f(x)$.

Продолжая эти операции, приходим к заключению, что $\Phi(x)$ должен оказаться некоторой степенью полинома $f(x)$:

$$\Psi(x,\Theta)\Psi(x,\Theta_1)\ldots\Psi(x,\Theta_{к-1}) = \{f(x)\}^l. \qquad (50)$$

Это равенство можно переписать так:

$$\prod_{i=0}^{к-1}(x^3-bx^2+\alpha_i x-\beta_i) = \{x^8-ax^7+a_2x^6-\ldots+a_8\}^l. \qquad (51)$$

Два старших слагаемых в левой части (51) будут:

$$x^{3к}-kbx^{3к-1}. \qquad (52)$$

Два старших слагаемых в правой части равенства (51) будут:

$$x^{8l}-lax^{8l-1}. \qquad (53)$$

Так как равенство (51) является тождеством, то имеем право написать:

$$x^{3k} = x^{8l}, \quad kbx^{3к-1} = lax^{8l-1}. \qquad (54)$$

Отсюда получаем

$$3k = 8l, \quad bk = al, \frac{b}{3} = \frac{a}{8}. \qquad (55)$$

Итак, предположение о неприводимости полинома, $f(x)$ в связи с наличием равенства (45), приводит к соотношению

$$b = \frac{3}{8}.$$

Первое из соотношений (55) даст

$$l \equiv 0(\mathrm{mod}.3),\ l \geqslant 3.$$

Таким образом, множитель $x - x_1$ встречается в правой части (50) не менее трех раз, и следовательно, не менее трех из числа полиномов:

$$\Psi(x, \Theta_1) = x^3 - bx^2 + \alpha_1 x - \beta_1$$

имеют делитель $x - x_1$. Таким образом, кроме тройки x_1, x_2, x_3, сумма членов которой равна b, должно еще существовать, по крайней мере, две тройки с той же суммой, содержащие в своем составе корень x_1. Каждая из таких троек не может иметь с другой более одного общего элемента, так как в противном случае две функции $\Psi(x, \Theta_1)$ совпадали бы. Поэтому вторая тройка может быть взята в виде:

$$x_1 + x_4 + x_5 = b. \tag{56}$$

Третья из рассматриваемых троек может быть по тем же мотивам написана в виде:

$$x_1 + x_6 + x_7 = b. \tag{57}$$

Складывая почленно (45), (56), (57) получим:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 3b = \frac{9}{8} a. \tag{58}$$

С другой стороны, имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = a. \tag{59}$$

Почленное вычитание равенств (58) и (59) даст:

$$2x_1 - x_8 = \frac{1}{8} a. \tag{60}$$

Отсюда следует, что полином $f\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{16}\right)$ должен иметь общие корни с $f(x)$, т. е. делиться на $f(x)$. Это возможно только при наличии тождества:

$$f(x)=2^8 f\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{16}\right). \tag{61}$$

Заменяя здесь x на $\frac{a}{8}$, получим:

$$f\left(\frac{a}{8}\right)=2^8 f\left(\frac{a}{16}+\frac{a}{16}\right)=2^8 f\left(\frac{a}{8}\right),\quad f\left(\frac{a}{8}\right)=0. \tag{62}$$

Последнее равенство противоречит предположенной неприводимости полинома $f(x)$.

Мы имеем право высказать теорему:

III. Если сумма трех корней полинома восьмой степени $f(x)$ с рациональными коэффициентами является числом рациональным, то полином приводим.

Теперь остается рассмотреть случай, когда сумма четырех корней полинома восьмой степени оказывается рациональным числом. Сам полином при этом мы будем предполагать неприводимым.

Пишем равенство:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=b. \tag{63}$$

Составим полином:

$$\Psi(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=x^4-bx^3+\alpha x^2-\beta x+\gamma. \tag{64}$$

Рассмотрим поле $R(\alpha, \beta, \gamma)=R(\Theta)$, где Θ примитивный элемент поля; степень такого поля обозначим через k, а сопряженные с Θ числа через $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{k-1}$.

Мы имеем право написать соотношения:

$$f(x)=\Psi(x,\Theta)\cdot\varphi(x,\Theta); f(x)=\Psi(x,\Theta_i)\varphi(x,\Theta_i);\ i=1,2,3,\ldots,k-1. \tag{65}$$

Опять составим произведение

$$\Psi(x,\Theta)\Psi(x,\Theta_1)\dots\Psi(x,\Theta_{к-1}), \tag{66}$$

Полином $\Psi(x)$ должен иметь рациональные коэффициенты. Пользуясь прежними соображениями, приходим к равенству:

$$\Psi(x,\Theta)\Psi(x,\Theta_1)\dots\Psi(x,\Theta_{к-1})=\{f(x)\}^l. \tag{67}$$

Это равенство должно быть тождественным. Приравнивая суммы двух старших слагаемых справа и слева в (67), получим тождественное равенство:

$$x^4 - кbx^{4к-1} = x^{8l} - lax^{8l-1}.$$

Отсюда получаем:

$$4к = 8l, \quad bк = al, \frac{b}{4} = \frac{a}{8}, \quad b = \frac{a}{2}. \tag{68}$$

Имеем право высказать новую теорему:

IV. Если сумма четырех корней полинома восьмой степени с рациональными коэффициентами является рациональным числом, но не равна полусумме всех корней этого полинома, то полином приводим.

Теоремы I, II, III, IV, разумеется, могут быть без труда доказаны классическими методами теории групп. Нам, однако, казалось, что независимые от теории групп доказательства могут представлять некоторый интерес.

Оканчивая на этом рассуждения, посвященные проблеме неприводимости полинома восьмой степени, мы должны сделать замечание, что доказанные теоремы не могут, однако, получить непосредственное использование на практике, так как затруднительно установить, что сумма некоторого числа корней полинома восьмой степени совершенно точно равна рациональному числу.

Поэтому на практике необходимо вычислить также все суммы произведений соответствующих корней, после чего вопрос получит окончательное разрешение делением $f(x)$ на полином:

$$\Psi(x) = (x-x_1)\,(x-x_2)\dots(x-x_l),$$

коэффициенты которого будут приняты в точности равными некоторым целым числам.

§ 4. Примеры исследования полиномов восьмой степени на неприводимость или приводимость.

Пример 1.

$$f(x)=x^8-x^7-4x^6-2x^5+8x^4+x^3+2x^2+2x+1.$$

Применение метода Н. И. Лобачевского дает следующие численные значения корней полинома

$$\bar{x}_1=0{,}96378+i\cdot 1{,}41375,$$

$$\bar{x}_2=0{,}96378-i\cdot 1{,}41375,$$

$$\bar{x}_3=-0{,}41902+i\cdot 1{,}51780,$$

$$\bar{x}_4=-0{,}41902-i\cdot 1{,}51780,$$

$$\bar{x}_5=0{,}34264+i\cdot 0{,}70310,$$

$$\bar{x}_6=0{,}34264-i\cdot 0{,}70310,$$

$$\bar{x}_7=-0{,}38740+i\cdot 0{,}27408,$$

$$\bar{x}_8=-0{,}38740-i\cdot 0{,}27408.$$

Сначала исследуем вопрос о неприводимости взятого уравнения.

Делителей 1-й степени не имеется, так как все корни комплексные.

Делителей 2-й степени не имеется, так как удвоенная действительная часть ни в одной комплексной паре не является целым числом.

Делителей 3-й степени нет, так как не имеется действительных корней уравнения, а делитель нечетной степени должен был бы обладать такими корнями.

Переходим к выяснению наличия или отсутствия делителей 4 степени. В случае наличия такого делителя существовали бы две пары комплексных корней, сумма которых давала бы целое рациональное число. Вычислением легко убеждаемся в отсутствии таких пар. Следовательно, делителей 4-й степени нет. Таким образом предложенный полином неприводим.

Пример 2-й.

$$f(x)=x^8-8x^7+19x^6-6x^5-42x^4+54x^3-25x^2+10x-1.$$

Находим корни с точностью до 0,001.

$$\bar{x}_1=1,873+1,556i,$$

$$\bar{x}_2=1,873-1,556i,$$

$$\bar{x}_3=0,127+0,436i,$$

$$\bar{x}_4=0,127-0,436i,$$

$$\bar{x}_5=4,277,$$

$$\bar{x}_6=1,138,$$

$$\bar{x}_7=0,133,$$

$$\bar{x}_8=-1,548.$$

Ввиду того, что ни один из действительных корней не равен целому рациональному числу, заключаем, что полином $f(x)$ не имеет делителей 1-й степени.

Так как ни одна из сумм двух или трех корней не равна целому числу, делаем заключение об отсутствии у полинома $f(x)$ делителей 2-й и 3-й степени.

Будем теперь рассматривать суммы четырех корней полинома. Замечаем, что сумма четырех действительных корней близка к целому числу, а именно:

$$\bar{x}_5+\bar{x}_6+\bar{x}_7+\bar{x}_8=4,000\ldots$$

Кроме того, вычислением находим следующие приближенные равенства:

$$\bar{x}_5\bar{x}_6+\bar{x}_5\bar{x}_7+\bar{x}_5\bar{x}_8+\bar{x}_6\bar{x}_7+\bar{x}_6\bar{x}_8+\bar{x}_7\bar{x}_8=-3,001,$$

$$\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7+\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_8+\bar{x}_5\bar{x}_7\bar{x}_8+\bar{x}_6\bar{x}_7\bar{x}_8=-8,002,$$

$$\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7\bar{x}_8=-1,003.$$

Мы видим, что суммы произведений действительных корней по два и по три и произведение четырех корней достаточно близки к целым числам.

Поэтому становится весьма вероятным наличие у полинома делителя четвертой степени

$$x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 1 = \Psi(x)$$

Делением полинома $f(x)$ на полином $\Psi(x)$ убеждаемся в справедливости следующего равенства:

$$f(x) = (x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 1)\ (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)$$

Таким образом, рассматриваемый полином $f(x)$ приводим.

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

т. XXI выпуск VII

Серия математическая

Ответственный редактор
Гюльнар Габидовна Баширова
Техн. редактор **Н. П. Рахманова**
Корректор **Л. М. Аверина**

Сдано в набор 12/X 1970 г. Подписано к печати 18/VIII 1971 г.
Формат 60×84$^1/_{16}$. Печ. л. 7,5. Тираж 1000 экз.
ЗМ00670. Заказ 6924. Цена 63 коп.

Областная типография управления по печати,
г. Ульяновск, ул. Ленина, 114.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
34	8 снизу	$\frac{A^1D^1}{AD} =$	$\frac{А^1Д^1}{АД} =$
56	4 сверху	$\ldots[\in \omega_2{}^4]\ldots$	$\ldots[\psi\omega_2{}^4]\ldots$
	5 снизу	$1\,\chi_1$	$l\chi_1$
57	11 сверху	$\Omega_1 \quad \frac{2a_2+a_4}{2}\psi\ldots$	$\Omega_1 = \frac{2a_2+a_4}{2}\varphi_1$
58	5 сверху	$(\sigma P'P'M_1M_3)=0$	$(dP'P'M_1M_3)=0$
60	5 сверху	$\ldots b_3\omega_1{}^4\ldots$	$\ldots b_5\omega_1{}^4\ldots$
	10 снизу	$\psi_1 \quad b_3\ (\omega_3{}^1+\omega_2{}^4,\ldots$	$\varphi_1=b_3\ (\omega_3{}^1+\omega_2{}^4),\ldots$
62	14 сверху	$\ldots S=0\ldots$	$\ldots S_2=0\ldots$
	15 сверху	$\ldots Q^2=2\ldots$	$\ldots Q=2\ldots$
	1 снизу	$\ldots\frac{4\ (l+a_2a_4)+{}^2a_4{}^2}{2l}\ldots$	$\ldots\frac{4\ (l+a_2a_4)+a_4{}^2}{2l}\ldots$
90	1 сверху	$\ldots tg_2\alpha\ldots$	$\ldots tg^2\alpha\ldots$
94	16 сверху	...уравнений (5)...	...уравнения (5)...
109	2 снизу	1	l

63 коп.